UNIVERSITÉ DE ROUEN NORMANDIE

Ldar
Laboratoire de didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

Résolution de problèmes arithmétiques à l'école

Catherine Houdement
catherine.houdement@univ-rouen.fr

ESENESR   25 septembre 2017

Plan

Introduction

I. Une vigilance face aux propositions de méthodologie de la résolution de problèmes

II. Un point de vue cognitiviste

Une hypothèse : le rôle des problèmes « basiques »

III. Que nous apprennent les élèves ?

Vers une typologie argumentée des problèmes arithmétiques verbaux

IV. Les problèmes basiques

Conclusion

Cette typologie comme outil d'analyse des problèmes …… relativement aux connaissances de la classe

Comment réussit-on ces problèmes?

LES MASSIFS DE TULIPES

Il s'agit à chaque fois de calculer le nombre de tulipes dans un massif :

a) un massif de fleurs, formé de 60 tulipes rouges et 15 tulipes jaunes ;

b) un massif de 60 rangées de 15 tulipes ;

c) un massif de 60 fleurs, formé de tulipes et de 15 jonquilles ;

d) 60 tulipes disposées en 15 massifs réguliers.

Un aparté sur les mots inducteurs

A. Deux classes A et B. Dans la classe A il y a 19 élèves, ce qui fait 7 élèves de moins que dans la classe B. Combien d'élèves dans la classe B ?

B. Aujourd'hui Marie a a 20 marrons. Elle a 12 marrons de plus qu'hier. Combien en avait elle hier?

Et celui-là ?

Les châtaignes de Charles ©ARMT cat.5 6 7

Charles a récolté 108 kg de châtaignes. Il les met dans trois paniers, un petit, un moyen, un grand.

Les châtaignes du panier moyen pèsent le double de celles du petit panier. Les châtaignes du grand panier pèsent le double de celles du panier moyen.

Après avoir rempli ces trois paniers, il lui reste quelques kg de châtaignes, exactement la moitié du poids des châtaignes du grand panier.

Combien de kg de châtaignes Charles a –t-il mis dans chaque panier ? Combien de kg lui reste-il ?

I VIGILANCE FACE AUX RESSOURCES appelées

***** méthodologie de la résolution de problèmes

* aides méthodologiques pour la résolution de problèmes

Des tâches à questionner

- Souligner les informations utiles
- Barrer les informations inutiles
- Etc….

Ne permettent pas d'améliorer la résolution de problèmes

1- Elles supposent qu'il existe une aptitude générale à la résolution de problèmes, indépendante des connaissances notionnelles

2- Quand on les analyse, ce sont des tâches qui ne peuvent pas être faites <u>sans résoudre le problème</u>, elles sont parties prenantes de la résolution, elles ne sont pas antérieures, ce que confirment les travaux de psychologie cognitive.

Trouver la question

Trouve et écris la question qui convient puis résous le problème

Ex 1 Jean doit livrer 450 bouteilles de vin à un client. Il en a déjà transporté 184.

Ex 2

Un séisme a commencé à 6h 17 min 36 s. Une première secousse a duré 40 secondes. Une deuxième secousse a commencé à 6h 23 min 7s et s'est terminée à 6h 24 min 18 s. Ce fut la fin du séisme.

La maison de M. Lapoisse s'est partiellement effondrée. Son voisin a appelé les secours qui sont arrivés en 7 mn : à 6h 33, ils étaient sur place.

Heureusement, personne n'était dans la maison quand elle s'est effondrée.

Extrait de http://www.pass-education.fr/trouver-la-question-problemes-cm1-exercices-mathematiques-cycle-3

Les étapes pour résoudre un problème

Des protocoles fantaisistes pourtant souvent proposés

Extrait de *Myriade 6eme*
2009, 2014
et 2016 p.241

Le point de vue de cognitivistes

II   COMMENT RÉUSSIT-ON À RÉSOUDRE DES PROBLÈMES ?

Deux processus cognitifs en jeu

Jean Julo 2002 *Grand N* n°69

- **Processus représentationnels**

Le sujet construit une représentation cognitive (mentale) du problème.
Le problème peut lui évoquer un problème autre, déjà résolu.

- **Processus opératoires**

Le sujet déclenche un traitement :

* ce traitement peut être inféré de sa mémoire s'il a reconnu d'une certaine façon le problème : *nous et les massifs de fleurs*

* s'il ne reconnait pas le problème , il lui faut construire une nouvelle stratégie : le *problème des châtaignes en cycle 3*

Attention : ces processus sont simultanés, ils interagissent ! C'est l'interaction de ces processus qui font réussir la résolution.

Une représentation cognitive

« Une représentation : une *construction mentale élaborée dans un contexte particulier pour servir* un but spécifique.

Elle peut être provisoire, circonstancielle, donc transitoire, si élaborée dans une tâche déterminée et à cette seule fin.

Elle peut être permanente, si elle est stable et durablement stockée en mémoire ; on parle alors de connaissance » (Baligand, 29-3-11)

La représentation d'un problème, que se construit un sujet, oscille entre deux « possibilités extrêmes »

1. Ce problème ressemble à un problème connu

→ traitement inféré de mémoire :
les massifs de fleurs

2. Ce problème ne rappelle rien au sujet

→ construction d'une stratégie (nouvelle) :
les châtaignes pour des élèves de CM

Reconnaitre un problème est lié à la représentation (évolutive) que le sujet s'en fait et à sa mémoire des problèmes (Julo 1995)

Conséquences sur les enjeux de l'enseignement des problèmes

1. Enrichir la mémoire des élèves sur les problèmes :
   - Vers élèves : donner des occasions aux élèves de résoudre des problèmes et de **les réussir seuls**
   - Vers enseignants /vers programmes : définir des types de problèmes dont on attend qu'ils soient **résolus « automatiquement** » par les élèves

Mais quels problèmes ?

2. Permettre l'invention de procédures :

Mais avec quelle finalité mathématique ?

Mon hypothèse pour problèmes à mémoriser :

→ceux qui sont les « éléments simples » des autres problèmes, relativement à un champ notionnel.

Que j'appellerai les problèmes « basiques »

Par exemple en arithmétique les problèmes liés à une opération :

2 données trouver la 3ème
(*2n+*1 données pour la proportionnalité),
sans information superflue ,
avec syntaxe simple
« *one step problems* »

Il en existe assez peu de ce type dans les manuels, mais surtout leur organisation n'est pas pensée

→ Outils théoriques qui les organisent : Vergnaud 1985, 1997

structures additives (champ conceptuel addition-soustraction)

ET structures multiplicatives (champ conceptuel multiplication-division -proportionnalité)

un outil crucial pour les problèmes arithmétiques

« Les problèmes arithmétiques verbaux ou à énoncés verbaux racontent des histoires. Ils sont donnés avec des mots et font intervenir peu de symbolisme mathématique. En anglais on utilise les expressions « word problems » ou « story problems ». (Feyfant, 2015, p.9)

III   CE QUE NOUS APPRENNENT LES ÉLÈVES RÉSOLVEURS Houdement 2007, 2011

- La question

Quelles « idées », dans le temps court de la résolution d'un problème numérique, sont susceptibles de provoquer une avancée vers la réponse ou au contraire un blocage ?

- La méthodologie

Entretiens individuels de type explicitation (Vermersch 1994) + accès brouillon

Après résolution individuelle de problèmes arithmétiques ordinaires, du quotidien de la classe : **problèmes de réinvestissement**

13 élèves dans 2 classes de cycle 3 et 11 protocoles

Recherche d'invariants inter-élèves ou de régularités individuelles

- Des résultats

Sur les problèmes que j'appelle « basiques » **: inférences et contrôles**

Sur les problèmes que j'appelle « complexes » : **construire de sous problèmes basiques calculables**, **qualifier les résultats (notamment intermédiaires)**

Inférence automatique de l'opération (ou du champ conceptuel)

CH et comment t'as fait pour savoir que c'était comme ça qu'il fallait faire
Elève de CE2 : Bah, quand j'ai la question je sais moins / plus / fois
Elève de CM2 : Bah, parce que quand / Bah, enfin… je sais pas trop / Je lis tout et après je vois si je dois faire une multiplication ou division.

CH *est ce qu'avec [*poids de 25 tables 300 kg *] on peut trouver le poids d'une table*
Deb CM2 *oui* (hésitante) */ enfin // je vais faire 300 divisé par 25* (en regardant CH)
CH *tu fais ce que tu penses / je sais pas moi / le papier c'est ton brouillon*
Deb (elle pose la division 300 par 25) *on trouve 12*

Nature des inférences et contrôles (1)

- Contrôle **pragmatique** : calcul contrôlé par comparaison avec connaissance de la réalité évoquée, puis accepté ou rejeté ou re-questionné

Deb suite

CH *alors qu'est ce que c'est 12*
Deb *le poids d'une table*
CH *es tu sure de ça*
Deb *non ça m'étonnerait*
CH *pourquoi ça t'étonnerait*
Deb *bah c'est beaucoup / c'est pas assez je veux dire*

Deb **sait qualifier** le résultat

Résultat en possible conflit avec contrôle pragmatique

Nature des inférences et contrôles (2)

- Inférence et contrôle **sémantique** : *partager c'est une division ; fois c'est multiplier; si on fait une multiplication on va trouver plus*

DIA 18 : Deb a sans doute mis en œuvre un telle inférence sémantique

Deb , un peu plus tard encore

CH *pourquoi tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat*

Deborah *bah parce qu'on peut faire une multiplication / 300 multiplié par 25 c'est pas possible/ c'est beaucoup trop / ni une soustraction /donc je pense faire une division / et aussi parce qu'il faut partager / il faut / oui / faut partager*

Conflit précédent réglé par contrôle sémantique

Nature des inférences et contrôles (3)

Inférence et contrôle **syntaxique** : conversion en écriture à trou (pré-algébrique) ; voire transformation en écriture « directe »

« *il faut faire 573 plus quelque chose égale 1260* »

Écriture de 573 + ? =1260

ET

- recherche par approximation
- OU conversion en 1260-573 et calcul

Pour 1860 voitures en cartons de 6 :

« *j'ai essayé de faire 6 fois quelque chose .....* »

Écriture de 6 x ? =1860

ET

- recherche par approximation
- OU conversion en 1860:6 *et* calcul

- Les inférences sont des constructions mentales personnelles à partir du problème qui font avancer
- Les inférences et ou contrôles peuvent avoir des domaines de validité limités !!
- Les contrôles sémantiques peuvent ne pas donner le bon résultat
- Les contrôles pragmatiques peuvent ne pas donner le bon résultat

UN CONTRÔLE pragmatique ou sémantique N'EST PAS UNE CERTITUDE DE BONNE RÉPONSE : c'est une construction mentale qui fait partie du raisonnement

LES INFERENCES syntaxiques sont à enseigner spécifiquement, et aussi en décroché de la résolution de problèmes.

En résumé sur problèmes « basiques » **des** stratégies élèves peu (re)connues

- Tester les opérations (toutes **ou celles du champ conceptuel inféré**)
- Mettre en œuvre des contrôles pragmatiques et sémantiques ; résoudre des conflits

→ Adapter à des nouveaux contextes des problèmes mémorisés ?

Un déficit constaté localement : le contrôle syntaxique, qui nécessite un apprentissage spécifique

-

Sur problèmes « complexes »

Un exemple

Au cinéma 'Royal Ciné' un adulte paye 6€ par séance et un enfant paye 4€ par séance.

A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants.

A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants.
La recette de la journée est 542€

Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

Problème utilisé par un enseignant : ERMEL (1997 ; 2005) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*. Paris :Hatier

Au cinéma 'Royal Ciné' un adulte paye 6€ par séance et un enfant paye 4€ par séance.

A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants.

A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants.

La recette de la journée est 542€

Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

J'appelle « **problème complexe** » un tel problème qui est

- un composé de problèmes basiques « cachés »....
- .... à construire par l'élève !

Sous problèmes calculables	Sous problèmes utiles
Séance du soir : nombre de personnes Séance du soir : prix que payent les adultes Séance du soir : prix que payent les enfants Séance de l'après midi : prix que payent les adultes Deux séances : prix que payent les adultes	Recette de la séance du soir OU Recette venant des adultes ET Séance du soir : prix que payent les enfants

Résoudre un « problème complexe » nécessite de :

- **Connecte**r (Bednarz & Janvier 1996) des informations pour construire des sous-problèmes **calculables** (souvent basiques) ………
- **……..** utiles pour avancer vers la réponse (en jeu la représentation du problème)
- Savoir résoudre ces problèmes basiques
- **MAIS AUSSI qualifier** les résultats intermédiaires :
  - les donner en grandeur *80 euros , 72 enfants*
  - les replacer dans le contexte du problème : 72 € *prix qu'ont payé les adultes à la séance*

Vers une typologie des problèmes arithmétiques

- Problèmes « basiques » (d'un savoir, d'un concept)

Enjeu élève : les mémoriser

- Problèmes « complexes »

Enjeu élève : construire des sous-problèmes basiques calculables en connectant des informations et qualifiant les résultats

- Problèmes a-typiques……

Enjeu élève : inventivité stratégique et flexibilité de raisonnement , persévérance et confiance en soi

IV LES PROBLÈMES “BASIQUES”

Exemples

Permettre aux élèves de les réussir seuls

Typologie Vergnaud (1997; 2001) connue mais à mieux utiliser :

structures additives et structures multiplicatives

- Elle répond à la question du sens des opérations !
- **Les sens de l'addition-soustraction** sont portés par les types de problèmes (composition d'états, transformation d'états, comparaison additive d'états, composition de transformations..) associés à la place de l'inconnue
- **Les sens multiplicatifs** :
  – multiplication, division partition, division- quotition, proportionnalité, qui sont les quatre types de proportionnalité simple,
  – proportionnalité simple composée,
  – proportionnalité multiple (aire, volume …)

Vergnaud (dir, 1997) *Le Moniteur de Mathématiques, cycle 3, Résolution de problème*. Fichier Pédagogique. Nathan

Bruno pèse 42,5 kg. Julien pèse 2,7 kg de plus que Bruno.

Quel est le poids de Julien ?

Je pèse 35 kg. Mon frère pèse 12 kilogrammes de plus que moi.

Combien mon frère pèse-t-il ?

Amélie a 71€. Jean a 38 € de moins qu'Amélie.

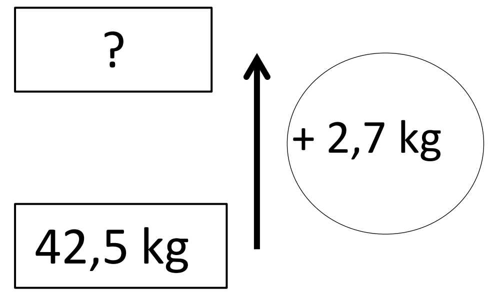
Quelle somme d'argent possède Jean ?

Pierre a 100 € ; il a 20 € de plus que Julien.

Combien d'argent a Julien ?

Un zèbre pèse 270 kg soit 230 kg de moins que la girafe.

Combien pèse une girafe ?



Référent Bruno

Bruno : problème de comparaison additive

Bruno pèse 42,5 kg. Julien pèse 2,7 kg de plus que Bruno.

Quel est le poids de Julien ?

Je pèse 35 kg. Mon frère pèse 12 kilogrammes de plus que moi.

Combien mon frère pèse-t-il ?

Amélie a 71€. Jean a 38 € de moins qu'Amélie.

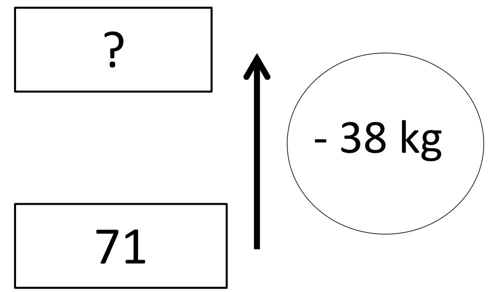
Quelle somme d'argent possède Jean ?

Pierre a 100 € ; il a 20 € de plus que Julien.

Combien d'argent a Julien ?

Un zèbre pèse 270 kg soit 230 kg de moins que la girafe.

Combien pèse une girafe ?



Référent Amélie

Bruno pèse 42,5 kg. Julien pèse 2,7 kg de plus que Bruno.

Quel est le poids de Julien ?

Je pèse 35 kg. Mon frère pèse 12 kilogrammes de plus que moi.

Combien mon frère pèse-t-il ?

Amélie a 71€. Jean a 38 € de moins qu'Amélie.

Quelle somme d'argent possède Jean ?

Pierre a 100 € ; il a 20 € de plus que Julien.

Combien d'argent a Julien ?

Un zèbre pèse 270 kg soit 230 kg de moins que la girafe.

Combien pèse une girafe ?

Même catégorie (Vergnaud) : **problèmes de comparaison additive**

100 €

+ 20 €

?

Référent Julien

Raisonnements proches,
mais de complexités différentes a priori

En ne tenant pas compte des nombres en jeu

Contexte des âges

François 1er est né en 1494 et a vécu jusqu'à l'âge de 53 ans.

En quelle année est-il mort?

En quelle année est né Léonard de Vinci, mort en 1519 à l'âge de 67 ans ?

Isabelle Blanc aura 32 ans en juillet 2010.

Quelle est son année de naissance ?

$\boxed{1494} \xrightarrow{+53} \boxed{?}$

$\boxed{?} \xrightarrow{+67} \boxed{1519}$

$\boxed{?} \xrightarrow{+32} \boxed{2010}$

Ce sont des problèmes de transformations d'états (état= là position sur « droite » du temps), mais l'inconnue porte sur état final (pb François) ou sur état initial (pb Léonard et Isabelle)

L'enseignant qui sait les catégoriser pourrait prévoir la hiérarchie des difficultés

Attention

La typologie Vergnaud de problèmes (avec repérage de la place de l'inconnue) sont des outils pour l'enseignant,

- pour construire des séries de problèmes ressemblants (au sens ci-dessus),
- pour ne pas évaluer les élèves sur des types de problèmes qu'il n'aurait pas fait travailler.

Il en est de même des schémas Vergnaud associés à ces problèmes. Ces schémas ne sont pas proposés pour faire l'objet d'un enseignement.

Exemples de problèmes basiques.. ... MULTIPLICATIFS

- Un piste d'athlétisme mesure 400 m. Paul fait 5 tours de piste. Quelle distance a-t-il parcourue ? *Basique CE2*
- Dans cette salle il y a 18 rangées de 25 fauteuils. Combien de personnes peuvent s'asseoir sur un fauteuil ? *Basique CE2*
- Pierre met huit min pour aller de chez lui à l'école. Zélie met quatre fois plus de temps. Combien de temps met Zélie ? *Basique CE2*
- Dans cette salle, 400 places en 25 rangées régulières. Combien de places par rangée ? *Basique CM*
- Alice met douze min pour aller de chez elle à l'école, trois fois moins de temps que Ryan. Combien de temps met Ryan ? *Basique CM*

Problèmes basiques
Pas de donnée superflue
Une syntaxe facile
Un contexte facile à comprendre (a priori)

Exemples de problèmes « presque » basiques …

Il est nécessaire de faire des « adaptations » (Robert 2008) pour retrouver le problème automatisé

Une place de spectacle scolaire coûte 2 €. Combien la classe doit payer pour que la classe de CE2 de 30 élèves puisse aller voir le spectacle ? (*Euro Maths* Hatier CE2 2010)

Pierre et Anne ont ensemble 9 pommes. Pierre a 3 pommes.
Combien de pommes a Anne ? *La réponse donnée en CP est souvent 9*

Pierre et Anne ont ensemble 9 pommes. 3 des pommes appartiennent à Pierre, les autres appartiennent à Anne. Combien de pommes a Anne ?
Le nombre de réponses correctes augmente de façon significative

CONCLUSION

- Les problèmes « basiques » d'un concept sont des connaissances de base. Il est urgent de restaurer un enseignement de ces problèmes et donc de faire fréquenter (et réussir) par les élèves une grande variété de tels problèmes, puis d'analyser avec les élèves leurs ressemblances
- Les problèmes « complexes » sont **des composés** de problèmes basiques. Ils nécessitent de savoir résoudre les problèmes basiques sous-jacents et des connaissances supplémentaires : connecter les informations pour construire le (les) sous –problème basique calculable, savoir qualifier… un
- Les problèmes « a-typiques » visent l'inventivité stratégique et la prise de risque ……
- UN ENJEU FORT pour les enseignants : analyser les problèmes

Quelques références (1)

Coppé S. & Houdement C. (2002) Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N* , 69. 53-32 http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/69/69n5.pdf

Feyfant, A. (2015). La résolution de problèmes de mathématiques au primaire. *Dossier de veille de l'IFÉ*, 105. Lyon : ENS de Lyon. http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA-Veille/105-novembre-2015.pdf

Floch & Pfaff N. (2005) Une séquence sur les problèmes additifs au cycle 2: le cas des comparaisons de mesures. *Grand N,* 75, 19-30 http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/75/75n3.pdf

Hersant M. (2008) Problèmes pour chercher des conduites de classe spécifiques. *Grand N,* 81, 57-76. http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/81/81n5.pdf

- Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N*, *71*, 7-23 http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/71/71n2.pdf

Quelques références (2)

Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,14*, 31-60
UNE PLACE POUR LES PROBLÈMES POUR CHERCHER

Houdement , C. (2016) Problèmes arithmétiques de réinvestissement: une synthèse, des pistes. *Actes du 42ème colloque sur la formation des maîtres en mathématiques. Besançon 2015.* 1-19.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100*

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N, 69, 31-52.*
http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/69/69n4.pdf

Nguala J.B. (2005) La multi-présentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N, 76,* 45-63.
http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/76/76n4.pdf

Thomas Y. (2007) Gommettes et étiquettes, des problèmes pour chercher. *Grand N* , 80, 29-42
http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/80/80n4.pdf