Partie 3

Problèmes additifs, soustractifs et multiplicatifs

Développer des compétences pour résoudre des problèmes additifs et soustractifs

Jean-Jacques Calmelet, Olivier Graff et Antonio Valzan

De la GS au CE1, il s'agit de conduire les élèves à résoudre des problèmes, essentiellement additifs (cela regroupe addition et soustraction) et multiplicatifs, « problèmes simples à une opération » et de les amener à automatiser le processus de reconnaissance de l'opération.
L'apprentissage suppose d'être attentif à différents points :
– la compréhension de l'énoncé (y compris le jeu symbolique, scolaire, qui consiste à s'emparer d'un problème ; devenir élève de ce point de vue est essentiel) ;
– la diversité des formes de présentation (variété des habillages) ;
– la progressivité de l'élaboration de procédures plus efficaces et de l'automatisation des procédures utilisées.

De la situation non écrite à l'énoncé écrit

Le rapport à la langue écrite des élèves de la maternelle impose la présentation des problèmes par des « situations » proches de la vie courante de l'élève (des pratiques où le rapport à l'objet et les manipulations sont directs). Dès la GS, il est nécessaire d'enseigner le passage de la « situation » à des « représentations » (verbales, dessinées, schématiques et numériques). Au CP, quand l'écrit sera installé, il sera question de faire comprendre que l'énoncé écrit d'un problème n'est souvent que l'habillage particulier d'une histoire que les élèves, ou d'autres personnes, auraient pu vivre.
Le passage de situations réellement vécues à des problèmes évoqués, et qu'il faut mentalement se représenter, est à aménager par l'enseignant au cours du cycle 2.
La progression conduit à se dégager progressivement des manipulations et à amener l'élève à dépasser le simple stade de l'action afin de s'engager dans un processus de conceptualisation.
Les énoncés écrits méritent un travail d'analyse spécifique prenant notamment en compte l'ordre de présentation des informations, le contexte ou le vocabulaire, les redondances, la présence d'informations implicites, la place de la question…
Divers facteurs peuvent être à l'origine des difficultés des élèves : l'utilisation des termes relationnels comme « moins que », « plus que », « de plus », ou encore le domaine numérique mobilisé. La place de la question peut également influer sur

Retour au sommaire

les performances des élèves. Dans certains contextes, un travail spécifique autour de la lecture d'énoncés peut s'avérer nécessaire afin d'aider les élèves à prendre la distance nécessaire pour appréhender cette nouvelle forme de texte. Ces échanges pourront avoir pour but de compléter des énoncés lacunaires pour éviter qu'un élève ne refuse que Juliette puisse donner des pommes car « elle n'en a pas » dans l'exemple « Léo a 3 pommes. Juliette lui en donne 5 de plus » ou de remettre les événements dans l'ordre de leur survenue en précisant les états initiaux, les étapes… en racontant une histoire.
De plus, le professeur amènera les élèves à mettre en relation ces énoncés avec ceux de problèmes rencontrés antérieurement dans le but de les conduire à identifier progressivement des catégories de problèmes.

La variété maîtrisée des problèmes proposés

D'un point de vue plus « strictement mathématique », dans leur variété, les situations additives ne présentent pas une égale difficulté selon la catégorie à laquelle elles appartiennent. Il est nécessaire d'en tenir compte lors de l'élaboration d'une progression. La progression présentée plus loin vise à les établir et à aider à amorcer une identification de certaines de ces catégories de problèmes, par exemple à l'aide d'affiches de référence.
L'écriture collective de ces affiches de référence menée avec la classe participe à la construction de la notion et à la structuration des connaissances. Pour les élaborer, le support de l'affiche (avec l'énoncé du problème choisi pour représenter le type de problèmes auquel sera associée la procédure de résolution retenue) permet de composer un exemple générique auquel seront apparentés les énoncés de la même catégorie de problèmes rencontrés lors des séances d'entraînement, de réinvestissement ou d'évaluation.
Progressivement, pour une catégorie de problèmes donnée, l'enseignant amènera les élèves à optimiser les procédures mobilisées, à les comparer et à se rapprocher des procédures les plus adaptées. Cette mise en relation des problèmes d'une même catégorie amènera aussi les élèves à réinvestir les procédures précédentes et à les associer à la catégorie de problèmes ainsi construite.

Les aides à la résolution

De nombreux facteurs peuvent faciliter la résolution du problème et favoriser la conceptualisation des notions mathématiques en jeu :
– la clarification du contexte et des références culturelles supports de l'énoncé (découverte du monde, vie courante : le sens et l'expérience des contextes de la vie d'enfant) ;
– les habiletés calculatoires (mentales ou écrites : évidemment dépendantes des données numériques et des opérations auxquelles elles peuvent donner lieu). Pour la phase d'abstraction, l'élaboration d'une représentation correcte n'assure pas nécessairement l'accès à une procédure de résolution adaptée…
Pour un problème donné, des échanges verbaux, le recours au mime (un jeu de rôles), la production de dessins ou de croquis constituent des aides susceptibles d'étoffer la différenciation pour aider les élèves à se représenter le problème puis à le résoudre. Cette représentation et cette résolution peuvent être également facilitées par le fait que l'élève est capable de replacer le problème dans une catégorie de problèmes et mette en œuvre ensuite des procédures adaptées. Ce travail de construction d'une représentation dans le cas d'un problème particulier ou d'une

Retour au sommaire

catégorie de problèmes peut être facilité par des activités préparatoires qui mettent en relation, énoncé de problème, croquis, dessin et procédure de résolution. Afin d'amener l'élève à résoudre le problème, l'enseignant pourra jouer sur une schématisation progressive des représentations pouvant être produites. Ainsi pour l'exemple suivant : *dans un autobus, il y a 27 personnes ; à un arrêt, il en descend 13. Combien y a–t–il de personnes quand l'autobus repart ?* L'élève peut apprendre à passer progressivement du dessin figuratif de la situation (des passagers par exemple) à la production d'un schéma plus au moins épuré (un trait pour représenter les passagers) puis à la production d'un schéma ou à des écritures plus formalisée du type (27 → ?) (13 + ? = 27 ou 27 – 13 =). Ces différents niveaux de représentation sont des étapes possibles à construire avec les élèves, sans les imposer à tous.
L'introduction d'un signe opératoire « + », « – » peut être justifiée soit par le souci de lever toute ambiguïté d'écriture[1] soit pour traduire le traitement de la situation par une écriture mathématique.

Grande section : problèmes de quantité et de nombres

Objectifs (programmes 2008) :

– comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités ;
– mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30 ;
– dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus ;
– associer le nom de nombres connus avec leur écriture chiffrée.

Approcher les quantités et les nombres

L'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets.
Les situations proposées aux plus jeunes enfants (distributions, comparaisons, appariements...) les conduisent à dépasser une approche perceptive globale des collections. L'accompagnement qu'assure l'enseignant en questionnant (comment, pourquoi, etc.) et en commentant ce qui est réalisé avec des mots justes, dont les mots–nombres, aide à la prise de conscience. Progressivement, les enfants acquièrent la suite des nombres au moins jusqu'à 30 et apprennent à l'utiliser pour dénombrer.
Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but : jeux, activités de la classe, problèmes posés par l'enseignant de comparaison, d'augmentation, de réunion, de distribution, de partage.
La taille des collections, le fait de pouvoir agir ou non sur les objets sont des variables importantes que l'enseignant utilise pour adapter les situations aux capacités de chacun.
À la fin de l'école maternelle, les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul mais c'est le cours préparatoire qui installera le symbolisme (signes des opérations, signe "égal") et les techniques.

1. Dans la situation où l'on met 2 cubes dans une boîte puis où l'on remet 3 cubes dans la même boîte, on met le signe « + » entre 2 et 3 pour représenter l'action « ajouter 3 cubes à 2 cubes » car sinon on pourrait lire 23 et comprendre 23 cubes.

Retour au sommaire

La suite écrite des nombres est introduite dans des situations concrètes (avec le calendrier par exemple) ou des jeux (déplacements sur une piste portant des indications chiffrées). Les enfants établissent une première correspondance entre la désignation orale et l'écriture chiffrée ; leurs performances restent variables mais il importe que chacun ait commencé cet apprentissage. L'apprentissage du tracé des chiffres se fait avec la même rigueur que celui des lettres.

Progression

Les nombres servent à désigner et à anticiper. La désignation peut se rapporter au vécu et à l'expérience. L'anticipation se rapporte davantage au perçu, au conçu. Il faut distinguer clairement l'usage des mots–nombres et le recours aux symboles (des constellations) puis aux signes (les chiffres) en étant conscient qu'utiliser des nombres en tant que désignation ou anticipation n'est pas connaître le système décimal : le passage de la GS au CP doit conduire progressivement au passage du nombre (ex [12]) à la numération (une dizaine et deux unités…).
La progression va donc reposer sur des activités de communication et d'anticipation, en faisant évoluer les manipulations sur les collections vers des représentations où la part de symbolisme s'inscrit dans une logique qui doit donner un sens aux signes.

Mise en œuvre

Une situation du type « deux pour un » peut fournir quelques repères représentatifs des étapes participant à la construction de la notion du nombre pour mémoriser une quantité. Cette situation relève de la construction d'une collection de cardinal double de celui d'une collection de référence qui renvoie notamment à deux grands types de procédures, n étant le cardinal de la collection de référence : celle de type n + n ou celle de type 2 + 2 + 2 +… (ces notations sont à destination du professeur). Les méthodes peuvent être plus ou moins élaborées ; le résultat peut être obtenu de *visu* ou par l'utilisation de nombres voire de faits numériques.

• Point de départ …

Situation d'apprentissage : combien d'oiseaux ?

Exemple de consigne : il faut aller chercher, en un seul voyage, juste ce qu'il faut d'oiseaux pour qu'il y ait un père et une mère oiseaux dans chaque nid.
Pour cette situation, chaque élève a réalisé un arbre sur lequel il est possible de fixer des nids.
Remarque : le jeu sur quelques variables de cette situation peut conduire à des orientations diverses. Les choix retenus dans la logique ci–dessous ne sont pas intangibles.
La situation de découverte peut être mise en œuvre en ménageant plusieurs temps.
Elle prend en compte les éventuelles difficultés rencontrées par les élèves.

La consigne ci–dessus engage individuellement chaque élève.
Dans un premier temps, malgré le contrôle visuel de l'ensemble des paramètres (arbres, nids, oiseaux) les tâtonnements expérimentaux sont à observer attentivement (la gestion coordonnée du nombre de nids, d'oiseaux, le « voyage »…).
Les expressions de la comparaison « plus », « moins », « tant de moins, de plus » se

Retour au sommaire

substituent progressivement à « pas assez » ou « trop », « beaucoup »...
Sur ces hésitations, se fonde la succession des défis ultérieurs relatifs à la quantité et au nombre.

• Deuxième temps...

Les oiseaux qu'il faut aller chercher sont stockés hors du champ de vision de l'élève. Ce choix contraint l'élève à se représenter la situation.
La démarche la plus souvent observée consiste à aller chercher, « beaucoup » d'oiseaux de manière à en avoir assez. Quelques élèves, après avoir choisi un nombre raisonné d'oiseaux, peuvent aussi revenir pour un « petit » supplément.
Il faut quelques essais, pour que les stratégies s'affinent..., mais, il est nécessaire, au départ, de négocier quelques « voyages supplémentaires »...

• Troisième temps...

Après avoir proposé plusieurs confrontations à cette situation (avec des nombres différents), le professeur peut apporter une nouvelle contrainte (un jeu de rôle) : un propriétaire de l'arbre, un messager chargé de la commande et un vendeur d'oiseaux.
Deux systèmes de communication, demandeur / messager et messager / vendeur, sont à la base de cette situation... et de ces nombreux aléas.
Exemple 1 : « il m'en faut 10 » peut laisser le vendeur un peu déconcerté... et il faudra adapter ou transformer le message en « 10 oiseaux ».
Exemple 2 : « il me faut 4 oiseaux par famille » et le messager recommande au vendeur perplexe « tu en prends 2 et tu comptes par famille... ».
À cette étape, il est fréquent que des élèves oublient de mémoriser le nombre et reviennent à la situation initiale.
Dans cette situation, le nombre sous forme **orale** est systématiquement utilisé. Il prend un statut et une fonction.

• Quatrième temps...

Chaque élève rédige un message de commande relatif à son arbre et ses nids.
La plupart des premiers messages écrits des élèves de GS ne se satisfont pas du nombre **écrit**. Le nombre ne semble pas être une information complète (même si on travaille uniquement sur des oiseaux, il faut que la nature soit citée : 10 est accompagné du dessin d'oiseaux). Cette logique s'apparente tout à fait au rapport entre grandeur et mesure : ici Elie et Antoine dessinent la grandeur de référence[2] puis indiquent la mesure [10].

Situations de réinvestissement

C'est l'utilisation du nombre qui est l'enjeu de cet entraînement. Le cheminement conduit à la transposition de cette situation vécue, manipulée, dans un cadre différent avec quelques variables :
– forme (commande – orale ou écrite, avec ou sans « vendeur ») ;
– situation de un pour un, trois pour un, ... ;
– contextes divers : jeu du clown, enfants et ballons, arbres et pommes..., gommettes.

2. Ce qui va conduire à quelques interprétations incertaines : désigne–t–on les nids ou les oiseaux ?

Retour au sommaire

La différenciation

C'est le point clé de toute situation pour que chaque élève puisse accéder à la démarche à apprendre : compte tenu de l'âge des élèves, le champ numérique sur lequel l'élève va travailler est sensible. Dans ces exemples, on pourra ainsi différencier le travail en fonction de toutes les variables numériques (nombre de nids, nombre de clowns, d'arbres…).

Conclusion

Une reprise chronologique des différentes étapes de la situation d'apprentissage présentée ci–dessus permet donc de dresser quelques remarques génériques.

• Point de départ : notion et fonction

C'est l'usage du nombre en situation où il est appelé spontanément comme un besoin pour décrire l'environnement, parler du monde, qui donne sens et statut au nombre (la place de ces apprentissages dans le domaine de « découvrir le monde » n'est pas anodine).
Très vite des opérations mentales s'élaborent directement sur les nombres (itération ou début de calcul) et participent à la construction de la pensée symbolique.

• Deuxième temps : numération orale / numération écrite

La suite des nombres apparaît spontanément dans la conversation, les entretiens et les échanges entre élèves. Elle est très inégalement partagée par les élèves, mais, même imparfaite, cette utilisation fait partie du langage courant, commun (la taille des quantités en jeu est évidemment un obstacle… ou une richesse !). Pour un apprentissage du nombre écrit, il faut d'abord créer le besoin de communication ! C'est sur cette base qu'on parvient à un niveau d'abstraction qui encourage le recours au signe, lui donne un sens et une fonction : on compte toujours « pour quelque chose ».
Le recours spontané à la numération orale n'est pas comparable à l'usage abstrait de l'écriture du nombre. Ces apprentissages préparent à l'abstraction et aux futurs recours aux signes du CP.

• Troisième temps : calcul

Si les procédures de calcul ne sont pas systématiquement étudiées, les habiletés, la mémorisation, ont été travaillées. Exemple du calcul sur les mots : « deux et deux quatre » fait partie des connaissances, les décompositions de 5 méritent de faire partie des connaissances en GS, celles de 10 sont en cours.

• Quatrième temps : papier / crayon

L'exercice a sa place, même en GS, dans la mesure où il s'inscrit dans un parcours où le virtuel, l'abstraction a été raisonnablement anticipée, où on a donné corps et sens à une pratique de référence qui peut être transposée… On doit conduire l'élève vers un usage raisonné et raisonnable des supports écrits, fondé sur une expérience pratique de référence (la situation des oiseaux par exemple) pour accompagner l'abstraction progressive.

Retour au sommaire

CP / CE1 : développer des compétences pour résoudre des problèmes additifs et soustractifs

Objectifs

CP : résoudre des problèmes simples à une opération.
CE1 : résoudre des problèmes relevant de l'addition, de la soustraction et de la multiplication.

Progression

L'automatisation du processus de reconnaissance de l'opération n'est réellement effective que si l'élève parvient à associer une opération (la soustraction par exemple) à n'importe quelle situation nécessitant cette opération. Choisir parmi plusieurs opérations nécessite de construire simultanément une automatisation (elle sera progressive) du processus de reconnaissance de l'opération.
L'automatisation est grandement facilitée si l'élève a élaboré en maternelle des connaissances, des capacités et des attitudes connues, reconnues et investies par les enseignants d'élémentaire.
Ces conditions impliquent que l'élève ait été confronté à la diversité des situations additives regroupant les problèmes d'addition et de soustraction.
Or tous les problèmes additifs ou soustractifs ne sont pas résolus avec le même taux de réussite. Cela tient principalement à leur inégale difficulté.
Voici une catégorisation[3] de problèmes additifs et soustractifs à traiter au cycle 2. Pour chaque catégorie, l'enseignant conservera un exemple d'énoncé. Certes la recherche d'un état final est souvent plus facile que celle de l'état initial ou de la transformation mais cette hiérarchie peut être contrariée, par exemple, par le contexte (habillage) ou par le domaine numérique mobilisé. C'est pourquoi la liste ci–dessous n'a pas de valeur chronologique et ne peut être assimilée à une progression.
Cette catégorisation peut également servir de grille de lecture pour l'analyse des manuels que l'on voudrait utiliser dans la classe pour travailler le champ des problèmes additifs et soustractifs.

Les différentes catégories de problèmes additifs et soustractifs

1. Recherche de l'état final connaissant la transformation positive et l'état initial.
   « Léo avait 3 billes. Puis Juliette lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant Léo ? »
2. Recherche de l'état final connaissant la transformation négative et l'état initial.
   « Léo avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Juliette. Combien de billes a maintenant Léo ? »
3. Recherche de l'état initial connaissant la transformation positive et l'état final.
   « Léo avait des billes. Puis Juliette lui a donné 5 billes. Maintenant Léo a 9 billes. Combien de billes avait Léo ? »
4. Recherche de l'état initial connaissant la transformation négative et l'état final.
   « Léo avait des billes. Puis il en a donné 5 à Juliette. Maintenant Léo a 3 billes. Combien avait–il de billes ? »

3. Cette catégorisation provient de la typologie des structures additives de G. Vergnaud.

Retour au sommaire

5. Recherche de la transformation positive connaissant l'état initial et l'état final.
   « Léo avait 3 billes. Puis Juliette lui a donné des billes. Léo a maintenant 9 billes. Combien de billes Juliette a–t–elle données à Léo ? »
6. Recherche de la transformation négative connaissant l'état initial et l'état final.
   « Léo avait 9 billes. Puis il a donné des billes à Juliette. Maintenant Léo a 4 billes. Combien de billes Léo a–t–il données à Juliette ? »
7. Recherche de la composée de deux états.
   « Léo a 3 billes. Juliette a 7 billes. Combien de billes ont Léo et Juliette ensemble ? »
8. Recherche d'un état connaissant un second état et la composée des deux états.
   « Léo et Juliette ont 17 billes ensemble. Juliette a 8 billes. Combien Léo a–t–il de billes ? »
9. Recherche de l'état à comparer connaissant l'état comparé et la comparaison positive.
   « Léo a 3 billes. Juliette a 5 billes de plus que lui. Combien de billes Juliette a–t–elle ? »
10. Recherche de l'état à comparer connaissant l'état comparé et la comparaison négative.
   « Léo a 9 billes. Juliette a 5 billes de moins que lui. Combien de billes Juliette a–t–elle ? »
11. Recherche de l'état comparé connaissant l'état à comparer et la comparaison positive.
   « Léo a 9 billes. Il en a 7 de plus que Juliette. Combien de billes Juliette a–t–elle ? »
12. Recherche de l'état comparé connaissant l'état à comparer et la comparaison négative.
   « Léo a 9 billes. Il en a 5 de moins que Juliette. Combien de billes Juliette a–t–elle ? »
13. Recherche de la comparaison positive connaissant les deux états.
   « Léo a 3 billes. Juliette en a 9. Combien de billes Juliette a–t–elle de plus que Léo ? »
14. Recherche de la comparaison négative connaissance les deux états.
   « Léo a 8 billes. Juliette en a 6. Combien de billes Juliette a–t–elle de moins que Léo ? »

Un exemple de situation d'apprentissage : le jeu des enveloppes

Pour cette étape, il s'agit bien d'une situation et non pas d'un énoncé.
Les élèves disposent d'enveloppes contenant un nombre de jetons inconnu d'eux. Le maître leur fait ajouter des jetons. Les élèves comptent alors tous les jetons dans leur enveloppe.
Ils doivent trouver le nombre initial de jetons dans leur enveloppe, sans contrainte de procédure, puis dans un second temps, en utilisant une écriture soustractive. Par la suite, il leur est demandé de vérifier avec le matériel.

Retour au sommaire

Un exemple de mise en œuvre : recherche de l'état initial à partir d'une transformation positive (cas numéro 3)

Objectif : automatiser l'utilisation de la soustraction pour la résolution d'un problème relevant de cette structure.

Il s'agit lors de cette situation de continuer à construire le sens de la soustraction en permettant aux élèves d'associer cette opération à un nouveau type de situation. Plusieurs obstacles sont repérables lors du déroulement de cette situation.

• Comprendre la situation

L'utilisation d'objets familiers aux élèves, l'action concrète des élèves sur ces objets et le fait de pouvoir sentir les jetons dans l'enveloppe avant l'ajout de jetons supplémentaires sont autant de précautions prises pour faciliter l'accès au sens : l'élève ne peut bâtir une représentation qu'à partir de manipulations ; la présentation d'un problème sous forme d'énoncé est encore une phase ultérieure.
Le fait d'évoquer la situation, de réaliser des actions faites ou de mimer l'action à faire pour retrouver les jetons présents au début dans l'enveloppe (enlever ceux qu'ils ont ajoutés) sont d'autres possibilités permettant aux élèves de comprendre la situation.

• Dissocier cette situation d'autres déjà rencontrées

Les élèves ont ensuite à se rendre compte que cette situation ne correspond à aucune autre déjà rencontrée. De ce fait, ils n'ont pas encore d'opération à associer à cette situation et doivent alors comprendre qu'il faut en « inventer » une. Mais le fait de dissocier cette situation des autres déjà rencontrées auparavant ne va pas de soi, surtout quand le terme « ajouter » fait automatiser l'utilisation de l'addition ! Une évocation des différences entre les problèmes (problème de transformation ou problème d'état) et du but à atteindre (recherche de l'état initial) est un premier moyen d'y parvenir quand il s'agit, comme ici, d'une nouvelle catégorie qui met en jeu une opération connue ou déjà rencontrée. La comparaison avec les affiches référentes servant à regrouper les problèmes de même « type » est un support et un recours essentiels pour cette structuration. Dans ces deux situations, et dans toutes les situations ultérieures, le lexique utilisé avec les élèves sera singulier à chaque classe mais en aucun cas il ne sera celui utilisé par la typologie. La terminologie « état initial – transformation – positive – négative – état final » est réservée aux enseignants. Les termes « problème avec une action », « problème sans action », « quantité avant l'action », « quantité après l'action » sont des exemples de termes plus en rapport avec le lexique à utiliser avec les élèves.

• Élaborer une première procédure

Le fait de savoir qu'il faut élaborer une solution non automatique engendre un tâtonnement (quelle trace est attendue du maître : un dessin, un texte, un calcul ?), la réutilisation par les élèves des outils les plus rassurants, leur permettant d'être le plus proche de la « vérité ». Ainsi les procédures n'utilisant ni signe ni nombre et les procédures dessinées (dessins d'enveloppes et de jetons) sont très largement répandues. L'utilisation de l'addition à trou est également une possibilité offerte aux élèves voulant spontanément élaborer une écriture symbolique (utilisation des nombres et des signes) car elle permet à l'élève de « suivre » la chronologie de l'énoncé.

Retour au sommaire

• Identifier cette nouvelle catégorie de problème et commencer à construire l'association soustraction / nouvelle procédure de résolution

La construction de l'affiche de référence permet de reconnaître les particularités de cette situation et de la dissocier d'autres situations ou problèmes en comparant des points précis comme « Y a–t–il une action ? Si oui, quel type d'action ? Recherche–t–on la quantité (la place) avant ou après l'action ? » La collection de procédures différentes (procédures dessinées, addition à trou, soustraction, ...) sur cette affiche permet aussi la construction de leurs équivalences en associant la soustraction comme procédure symbolique de résolution pour ce type de catégorie de problèmes. Chaque affiche de référence sera différente dans chaque classe, puisque renseignée avec les dessins, schémas, calculs spécifiques à chacune d'elles.

Une fois la première association entre la soustraction et cette catégorie de problème faite, elle demande à être automatisée lors de la rencontre de nouveaux problèmes relevant de cette même catégorie. C'est dans cette optique que sont proposées les situations de réinvestissement.
Problème 1 : combien y avait–il de cubes dans la boîte ? J'ai des cubes dans une boîte. J'en ajoute 35. Maintenant, j'en ai 123.
Problème 2 : je joue au jeu du 25*. Je suis sur une case. Je fais « 13 » avec les dés et « reculer » avec le dé bicolore. Je déplace alors mon pion et je me trouve sur la case 26. Sur quelle case avais–je mon pion avant de jouer ?
* *Le jeu du 25 est une piste type jeu de l'Oie constituée de 50 cases numérotées sur laquelle le départ se trouve à la case 25. On joue avec un ou plusieurs dés constellations et un dé bicolore pour « avancer » et « reculer »*

Situation de réinvestissement

Plusieurs obstacles sont repérables lors du déroulement de ces situations :

• Le passage de la situation à l'énoncé

L'énoncé est source de difficultés multiples en fonction de ses différents habillages. Ainsi on a pu citer dans la première partie de ce chapitre les aides d'ordre général : faire référence à l'univers des élèves, décrire les événements dans l'ordre de leur survenue, proposer des données numériques à la portée des élèves, placer la question en début d'énoncé. Mais particulièrement pour cette catégorie de problème où l'on recherche l'état initial, le fait de parler de cet état initial et de ne pas le rendre lacunaire permettra une meilleure compréhension de l'énoncé.
Par exemple, les élèves ont une meilleure représentation de l'énoncé « J'ai des cubes dans une boîte. J'en ajoute 14. Maintenant, j'en ai 26 » que de l'énoncé « J'ajoute 14 cubes dans une boîte et maintenant j'en ai 26 ».

• Automatiser l'utilisation de la soustraction pour la résolution d'un problème

Où l'on recherche l'état initial connaissant la transformation positive et l'état final (problèmes 1 et 2) : après une première représentation de la situation ou de l'énoncé, il reste encore à l'élève à élaborer une procédure de résolution, si possible d'y associer la procédure soustractive attendue et ce de façon la plus automatique possible. Le choix de la fiche de référence correspondant à l'énoncé est un moyen de contribuer à l'automatisation de la reconnaissance de la catégorie

Retour au sommaire

de problème et de transférer des procédures de résolution analogues, y compris l'utilisation de la soustraction. Le fait de pouvoir s'y référer lors de la rencontre de chaque problème de cette catégorie est un médiateur entre l'automatisation assistée et l'automatisation autonome. Enfin la création d'énoncés de la catégorie de problème « Recherche de l'état initial à partir d'une transformation positive et de l'état final (problème de type 3) » permet aux élèves, au–delà de l'énoncé et du contexte, de reconnaître une structure identifiée comme invariant d'une catégorie de problème.

• Traiter le contexte ordinal

Il s'agit pour les élèves de faire l'analogie entre une situation ordinale et une situation cardinale aussi bien pour la reconnaissance de la catégorie de problème que pour les procédures de résolution associées à la situation cardinale et qui peuvent être transférées à la situation ordinale. Cette catégorie de problème doit donc aussi être rencontrée dans un contexte ordinal (problème 2). L'utilisation de la fiche outil et de l'identification de l'inconnue permet aussi de faire le lien entre les deux contextes.

Problème 3 : la mariée a ajouté 24 fleurs à son bouquet. Le bouquet en compte maintenant 182. Combien y avait–il de fleurs avant ?

Situation d'évaluation

Ce problème peut être utilisé comme évaluation sommative ou comme évaluation formative suivant la réussite ou non de l'élève. Il doit être présenté parmi d'autres problèmes au cours de l'évaluation de plusieurs catégories de problème.
Dans le cas de la réussite de l'élève, l'évaluation est sommative et l'élève sait *résoudre des problèmes relevant de la soustraction* pour cette catégorie de problème précisément.
Dans le cas de la non–réussite de l'élève, l'évaluation est formative et dans ce cas des critères de réussite sont définis pour permettre à l'enseignant de définir exactement les capacités à faire évoluer.
Quelques repères parmi les critères de réussite quand on analyse des réponses erronées ou partielles :
– l'élève sait évoquer la situation concrète ;
– l'élève sait évoquer le fait que ce soit un problème avec une transformation (action) ;
– l'élève sait identifier et évoquer l'état final ;
– l'élève sait identifier et évoquer la transformation positive ;
– l'élève sait reconnaître et évoquer une situation de type 3 : recherche de l'état initial à partir d'une transformation positive ;
– l'élève utilise une addition à trou pour résoudre le problème.

Retour au sommaire

Conclusion : les autres catégories additives (cas 1, 2, 4 à 14)

La mise en œuvre et la progressivité des apprentissages sont identiques pour la catégorie présentée.
On n'oubliera pas qu'il est indispensable d'entretenir les connaissances et de reprendre ces types de problèmes et leur classification régulièrement, tout au long de l'année, dans des contextes variés et différents (voir le champ des mesures en particulier). C'est un ancrage à long terme qui est visé.
Enfin, cette logique peut être transposée au champ multiplicatif (l'approche de la division groupement/partage, nouvelle au CE1, se prête particulièrement à cette démarche).

Retour au sommaire

Problèmes de multiplication et de division au cycle 2

Valérie Bistos et Nicole Matulik

Cadre du socle commun de connaissances et de compétences[4]

Des approches concrètes et pratiques des mathématiques […] aident les élèves à comprendre les notions abstraites. […] Les mathématiques fournissent des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne. […] La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité.
Principales compétences attendues à la fin du CE1 (premier palier) dans le champ multiplicatif :
– calculer une multiplication ;
– diviser par 2 et par 5 des nombres entiers inférieurs à 100 (dans le cas où le quotient exact est entier) ;
– restituer et utiliser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5 ;
– calculer mentalement en utilisant des multiplications simples ;
– résoudre des problèmes très simples.

Différentes catégories de problèmes

La progressivité des séances d'enseignement se conçoit selon deux axes : l'identification des catégories de problèmes et le choix des variables didactiques au sein d'un même type de problèmes.

Problèmes de multiplication et de division

Les situations proposées dans un contexte de distribution, de partage et de groupement relèvent de problèmes de multiplication et de division.

Problèmes de multiplication

Deux types de problèmes sont à distinguer dans le cadre de la multiplication : ceux qui font appel à une addition réitérée et ceux qui mettent en jeu un produit de mesures.
Exemple de problème relevant de l'addition réitérée : il y a 4 élèves. La maîtresse distribue 3 jetons à chaque élève. Combien distribue–t–elle de jetons en tout ?

Nombre d'élèves	Nombre de jetons
1	3
4	?

4. Socle commun de connaissances et de compétences – décret n° 2006–830 du 11 juillet 2006.

Retour au sommaire

Exemple de problème relevant du produit de mesures : quel est le nombre de carreaux de chocolat que contient une tablette de 3 sur 4 ?
La représentation rectangulaire rend ici visible la propriété de commutativité de la multiplication. Ces types de problèmes sont scolairement bien identifiés comme support à la construction du concept de multiplication.

Problèmes de division

Deux types de problèmes sont à distinguer dans le cadre de la division : problèmes de division quotition et problèmes de division partition.
Exemple de problème de division quotition : la maîtresse a 12 jetons. Elle les distribue à un groupe d'élèves. Chaque élève reçoit 3 jetons. Combien y a–t–il d'élèves ?

Nombre d'élèves	Nombre de jetons
1	3
?	12

Résoudre un problème de division quotition revient à calculer le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection connaissant la valeur d'un paquet.
Exemple de problème de division partition : la maîtresse a 12 jetons. Elle les distribue à 4 élèves. Chaque élève a le même nombre de jetons. Combien de jetons a chaque élève ?

Nombre d'élèves	Nombre de jetons
1	?
4	12

Résoudre un problème de division partition revient à calculer la valeur d'un paquet connaissant le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection.

Identification et choix des variables

La taille des nombres, la relation entre les nombres (double, moitié…), l'habillage de la situation et la présentation de l'énoncé (écrit, oral, dessin, schéma, matériel…) sont autant de variables qui peuvent moduler le niveau de complexité du problème proposé dans le cadre d'une pédagogie différenciée. C'est en faisant évoluer tour à tour chacun de ces paramètres que l'enseignant favorise chez l'élève la construction progressive des compétences en résolution de problèmes.
Par exemple, l'augmentation de la taille des nombres de l'énoncé peut obliger l'élève à dépasser, voire abandonner les procédures initiales de dessin. Elle permet de justifier l'introduction des écritures mathématiques avec le recours à différents signes. Cette écriture symbolique sera progressivement exigée.
La relation entre les nombres est également déterminante dans le choix de la procédure adoptée par l'élève. Ainsi, un problème de division quotition où la valeur du paquet est 10 revient à un problème de numération (lire le nombre de dizaines dans l'écriture du nombre).

Retour au sommaire

En GS, les situations proposées par l'enseignant sont essentiellement issues de la vie courante et extraites de la vie de la classe, afin de faire sens pour la majorité des élèves. L'objectif à atteindre à la fin de l'école maternelle est de dépasser la manipulation et le simple constat pour éventuellement s'appuyer sur le dessin, puis s'en détacher pour entrer *a minima* dans la schématisation, voire une première écriture numérique. La manipulation devient alors davantage un outil d'aide pour présenter le problème ou pour valider une réponse élaborée au cours de la phase d'anticipation, qu'un objet d'enseignement.
Toutefois la démarche empirique prévaut. L'enseignant amène alors progressivement l'élève à verbaliser sa démarche fondée sur le tâtonnement et la réalisation de l'expérience (par exemple répartir 12 dominos entre 4 élèves).
En CP et CE1, au regard des progressions jointes aux programmes 2008, aborder le champ multiplicatif (multiplication et division) exige d'avoir abordé le champ additif (addition et soustraction). Pour autant, l'enseignant n'attendra pas que tous les élèves maîtrisent les connaissances liées aux problèmes additifs pour introduire des situations multiplicatives. C'est aussi par des allers–retours, des comparaisons de différentes procédures que se construisent les savoirs.

GS : des problèmes de distribution et de partage

Objectifs des programmes 2008

Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but : jeux, activités de la classe, problèmes posés par l'enseignant de comparaison, d'augmentation, de réunion, de distribution, de partage. [...] À la fin de l'école maternelle, les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul.
Compétences attendues à la fin de l'école maternelle :
– comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités.[5]

Mise en œuvre

En classe de GS, l'enseignant propose des situations concrètes et variées qui relèvent des différentes structures de problèmes de multiplication et de division citées ci–dessus (problèmes de multiplication relevant de l'addition réitérée ou du produit de mesures, problèmes de division de type quotition ou partition). La vie de la classe s'y prête : il peut se saisir d'activités vécues dans la classe pour créer des situations de distribution et de partage.
En début d'année scolaire, ces activités sont conduites sous la forme de situations de découverte vécues et auto–validantes. Elles se prolongeront tout au long de l'année par des énoncés qui demanderont à être représentés pour ensuite être traités. En fin d'année scolaire, elles donneront lieu à une évaluation individuelle qui servira de repère à l'entrée au CP.
Cette progressivité des situations d'apprentissage repose sur la continuité et la cohérence. Ces dernières nécessitent des traces écrites garantes des apprentissages des élèves (mémoire de la classe), traces que l'on interrogera tout au long de l'année.

5. Socle commun de connaissances et de compétences – décret n° 2006–830 du 11 juillet 2006.

Retour au sommaire

1. Situation de découverte : combien de jetons ?

L'enseignant propose aux élèves de jouer à un jeu de société qui nécessite des jetons. Il a quatre élèves autour de lui et il leur annonce ce qu'ils vont chercher.
Vous allez chercher combien de jetons je dois prendre dans la boîte qui est devant moi. Chacun doit avoir trois jetons. Attention, je dois prendre les jetons en une seule fois. Je vous demande d'écrire le nombre de jetons que vous avez trouvé.
Problème de multiplication (relevant de l'addition réitérée)

En début de GS, cette situation est présentée oralement. Des jetons, une bande numérique individuelle (*a minima* nombres de 1 à 30) et une ardoise sont à la disposition éventuelle des élèves.
Exemples de procédures correctes susceptibles d'être observées :
– l'élève utilise les jetons mis à sa disposition, simule la distribution « 1–1–1–1 1–1–1–1 1–1–1–1 » ou « 3–3–3–3 », plus rarement « 2–2–2–2 1–1–1–1 », puis rassemble les jetons de la collection ainsi constituée, les dénombre puis écrit « 12 » en se référant éventuellement à la bande numérique ;
– l'élève dit « un–deux–trois » quatre fois de suite en pointant les cases de la bande numérique, puis recopie le nombre « 12 » figurant dans la dernière case pointée ;
– l'élève procède mentalement (par exemple par des calculs du type « 3 et 3 ; 6 », encore « 3 et 3 ; 6 », et « 6 et 6 ; 12 ») et donne le résultat « 12 » à l'oral et/ou à l'écrit.
Il importe que l'enseignant identifie les procédures effectivement mises en œuvre par ses élèves et qu'il envisage, de par ses choix, de bloquer certaines d'entre elles.
Exemples de procédures erronées éventuelles ou d'erreurs provenant lors de la mise en œuvre d'une procédure correcte :
– bonne compréhension de la situation, mais l'élève se trompe en dénombrant sa collection finale ou oublie au fur et à mesure de sa procédure ce qu'il cherche ;
– mauvaise compréhension de la situation : l'élève confond les données numériques du problème ou mémorise difficilement les différentes données.
À l'issue de cette recherche, l'enseignant demandera aux élèves de représenter sur leur ardoise la situation traitée pour s'assurer, outre une bonne compréhension du problème, du degré d'abstraction dont témoigne le niveau de symbolisation.
La nécessaire élaboration d'une trace écrite collective peut s'effectuer à la suite des précédentes étapes ou dans un temps différé.

Autres exemples de situations de découverte

L'enseignant annonce aux élèves qu'ils vont fabriquer un jeu de cartes.
Vous allez chercher combien de cartes différentes on peut fabriquer avec trois formes géométriques (carré, rond, triangle) et quatre couleurs (jaune, rouge, vert, bleu). Attention, il y a une seule forme et une seule couleur par carte.
Problème de multiplication (relevant du produit de mesures)

Retour au sommaire

L'enseignant a préparé des pots de peinture pour les ateliers. Il annonce aux élèves ce qu'ils vont chercher.
Vous allez chercher combien d'ateliers fonctionneront cet après-midi. Il y a seize pots de peinture. Chaque groupe doit avoir quatre pots. Je vous demande d'écrire le nombre d'ateliers que vous avez trouvé.

Problème de division quotition

L'école vient de recevoir des ballons en mousse. L'enseignant annonce aux élèves ce qu'ils vont chercher.
Vous allez chercher combien de ballons le directeur va distribuer à chaque classe. Il y a quinze ballons et cinq classes. Bien évidemment chaque classe doit avoir le même nombre de ballons. Je vous demande d'écrire le nombre de ballons que vous avez trouvé.

Problème de division partition

2. Situations d'entraînement

En cours de GS, il s'agit de reprendre des problèmes de multiplication et de division avec un habillage nouveau et une présentation différente, pour amener l'élève à entrer pas à pas dans la symbolisation graphique (dessin, schéma, écriture chiffrée). La manipulation, initialement objet d'enseignement, devient alors progressivement un outil d'aide. Par ailleurs, l'enseignant s'autorisera à proposer, outre des situations vécues, des situations fictives en s'assurant qu'elles fassent sens pour l'élève. De même que pour les situations de découverte, les traces écrites collectives sont amenées à évoluer en fonction des procédures mises en œuvre par les élèves.

Vous allez chercher combien de poissons ont été pêchés. Il y a six pêcheurs. Chacun a attrapé quatre poissons.

Problème de multiplication (relevant de l'addition réitérée)

Vous allez chercher le nombre de carreaux de chocolat que contient une tablette de six sur trois.

Problème de multiplication (relevant du produit de mesures)

Vous allez chercher combien de chapeaux utilise le magicien. Il a vingt lapins. Il met quatre lapins dans chaque chapeau.

Problème de division quotition

Vous allez chercher combien de tulipes le jardinier va planter dans chaque rangée. Il y a dix-huit tulipes et trois rangées.

Problème de division partition

Retour au sommaire

3. Différenciation

Les difficultés rencontrées par les élèves concernent essentiellement deux domaines : la capacité à dénombrer et la compréhension du problème dans son contexte.
Tout comme il existe dès l'école maternelle des différences au niveau des compétences langagières des élèves, on constate de la même façon une grande hétérogénéité dans les capacités de dénombrement. Ceux qui utilisent des procédures mentales correctes ont déjà acquis des capacités de comptage (en mobilisant en particulier la connaissance des doubles) et d'anticipation qui reposent sur des répertoires mémorisés.
Le choix de la taille des nombres, en termes de variables, permet de proposer aux élèves en difficulté des situations de structure identique avec des nombres plus petits. Cette démarche d'aide peut être renforcée par un étayage conséquent autour d'activités décontextualisées de comptage. Le champ numérique demeure donc un paramètre important.
Au–delà des quantités, l'identification des grandeurs en jeu peut être source de difficulté dans la compréhension du problème dans son contexte. La reformulation de l'énoncé, l'utilisation de matériel, la mise en scène de la situation sont autant d'aides possibles. On se réfèrera également aux traces collectives élaborées au cours des différentes situations antérieures rencontrées. Ceci dans la perspective d'amener l'élève à dépasser la tâche (action) pour aller vers l'activité (anticipation) afin qu'il ne se précipite pas dans la recherche au point d'en oublier ce qu'il doit chercher.

De l'école maternelle vers l'école élémentaire

Si à l'école maternelle, l'enseignant doit aborder les différentes structures de problèmes de multiplication et de division (problèmes de multiplication relevant de l'addition réitérée ou du produit de mesures, problèmes de division de type quotition ou partition) sans exigence de systématisation, cette dernière devient incontournable en classes de CP et CE1. La formalisation évolue de ce fait de l'élaboration d'une trace écrite sous forme de dessin ou de schéma à l'installation du symbolisme mathématique à l'aide de signes.
Pour ce faire, la répartition sur ces deux années des enseignements liés aux problèmes de multiplication et de division, nécessite de traiter progressivement ces derniers pour cheminer de la multiplication vers la division qui ne fera l'objet d'un apprentissage systématique qu'au cycle 3.
Ainsi, le problème de multiplication relevant de l'addition réitérée ou du produit de mesures est privilégié en CP pour une approche de la multiplication qui sera consolidée en CE1. Les situations de groupement et de partage relevant de problèmes de division de type quotition ou partition, permettent dès le CE1 d'approcher la division dont l'utilisation sera automatisée au cycle 3.

CP : des problèmes de multiplication

Objectifs des programmes 2008

La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages.[6]
La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations.[7]

6. Préambule du Tableau des progressions pour le CP et le CE1.
7. Préambule programmes Mathématiques CP–CE1.

Retour au sommaire

C'est le cours préparatoire qui installe le symbolisme (signes des opérations, signe « égal ») et les techniques.[8]

Principales compétences attendues à la fin du cours préparatoire dans le champ multiplicatif :
– connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20 ;
– connaître la table de multiplication par 2 ;
– résoudre des problèmes simples à une opération.[9]

Mise en œuvre

En classe de CP, la construction du sens de la multiplication est amorcée. Le problème de multiplication relevant de l'addition réitérée ou du produit de mesures est ainsi privilégié pour une approche de la multiplication qui sera consolidée en CE1.

1. Situation de découverte : combien de stylos ?

Il s'agit de chercher le nombre total de stylos.
L'enseignant distribue quatre stylos à chaque élève. Il y a huit élèves. Combien a–t–il distribué de stylos en tout ?
Problème de multiplication (relevant de l'addition réitérée)

La taille des nombres est volontairement choisie de façon à ce que le nombre d'itérations (additions) soit élevé. L'élève va ainsi prendre conscience des limites de la procédure d'addition réitérée en termes d'efficacité et de fiabilité. Cela suppose que l'addition ait été traitée en amont. Cette situation de découverte sera donc proposée de préférence au cours du second semestre de l'année scolaire.
Pour faciliter la compréhension du passage de l'addition réitérée à la multiplication, « 4 x 8 » pourra se lire « 4 que je répète 8 fois ». Cette aide à l'identification de la valeur réitérée (ici quatre stylos) permet de lever l'ambiguïté liée à la seule utilisation du mot « fois ».

Exemples de procédures correctes, susceptibles d'être observées :
– trace écrite comportant le résultat « 32 » : l'élève fait appel à un schéma (voire encore un dessin) et/ou une écriture chiffrée du type « 4 4 4 4 4 4 4 4 », « 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 » (parfois « 4 x 8 » ou « 8 x 4 »), « 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 », « 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 » ;
– absence de trace écrite : l'élève procède mentalement et donne oralement le résultat « 32 ».
Exemples de procédures erronées éventuelles ou d'erreurs provenant lors de la mise en œuvre d'une procédure correcte :
– bonne compréhension de l'énoncé mais l'élève fait des erreurs de comptage et/ou des erreurs dans le nombre d'itérations ou oublie au fur et à mesure de sa procédure ce qu'il cherche.

8. Programmes Approcher les quantités et les nombres École maternelle.
9. Socle commun de connaissances et de compétences – décret n° 2006–830 du 11 juillet 2006.

Retour au sommaire

– mauvaise compréhension de l'énoncé : l'élève s'empare de façon aléatoire des nombres 4 et 8 par une procédure mentale, un dessin, un schéma et/ou une écriture chiffrée du type « 4 8 », « 4 + 8 » ou « 8 + 4 » ou confond les nombres d'élèves et de stylos.
La nécessaire élaboration d'une trace écrite collective peut s'effectuer à la suite de cette recherche ou dans un temps différé.

Autre exemple de situation de découverte :

> Il s'agit de chercher le nombre de tulipes que le jardinier a planté.
> *Un jardinier a planté sept rangées de quatre tulipes. Combien a–t–il planté de tulipes en tout ?*
> Problème de multiplication (relevant du produit de mesures)

2. Situations d'entraînement

> Il s'agit de chercher le nombre total de joueurs.
> *Chaque équipe a six joueurs. Il y a cinq équipes. Combien y a–t–il de joueurs en tout ?*

> Il s'agit de chercher le nombre total de cartes rouges.
> *Avec une carte jaune on gagne trois cartes rouges. Un enfant a sept cartes jaunes. Combien gagne–t–il de cartes rouges ?*

Ces situations d'entraînement ont vocation à remobiliser les savoirs de façon à mieux identifier les structures de problèmes multiplicatifs pour mieux réinvestir les procédures de résolution associées.
De même que pour la situation de découverte, les traces écrites collectives sont amenées à s'enrichir en fonction des procédures mises en œuvre par les élèves.

3. Différenciation

On constate que l'élève associe souvent la résolution du problème au calcul d'une opération dans une démarche techniciste : il prend systématiquement les nombres présents dans l'énoncé et les soumet à l'opération qu'il maîtrise le mieux (addition). Le contrat didactique est alors à (re)poser.
Les démarches et outils d'aide proposés en GS peuvent être repris en CP.
Pour améliorer la compréhension de l'énoncé, l'enseignant peut proposer aux élèves de :
– reformuler oralement la situation ;
– représenter la situation de façon figurative (dessin, image, photo) ou symbolique (schéma) ;
– mimer la situation avec ou sans matériel ;
– vivre des situations concrètes de distribution similaire (jeux de cartes, de dés, de société).
Pour étayer la méthode de calcul, l'enseignant peut proposer aux élèves :
– des outils d'aide au calcul (bande numérique) ;

Retour au sommaire

– des démarches d'aide au calcul (comptage des jetons de un en un ou de deux en deux).
S'ajoutent, dans le cadre du calcul mental ou réfléchi, les répertoires additif et multiplicatif (table d'addition, doubles et moitiés) affichés dans la classe et/ou dans les cahiers, voire déjà mémorisés.

CE1 : des problèmes de groupements et de partage pour une approche de la division

Objectifs des programmes 2008

La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages.[10]
Elle fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations.
Principales compétences attendues à la fin du cours élémentaire première année dans le champ multiplicatif :
- *connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant ;*
- *mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5 ;*
- *connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des produits ;*
- *connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre ;*
- *diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier) ;*
- *résoudre des problèmes relevant de la multiplication ;*
- *approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements.*[11]

Mise en œuvre

Les élèves ont rencontré depuis le début de leur scolarité des problèmes de groupements et de partage.
Jusqu'à présent, ils les ont résolus en utilisant soit un dessin, un schéma, une addition à trou, ou encore une multiplication à trou. Les traces collectives de ces situations rencontrées l'attestent.
Au second semestre de classe de CE1, ces problèmes de groupements et de partage vont permettre aux élèves de découvrir une nouvelle opération : la division. Il s'agit, comme l'indiquent les programmes, d'amorcer une première approche de la division. Il est donc important que les élèves comprennent le sens de cette opération et repèrent dans quels types de problèmes ils vont pouvoir l'utiliser.

1. Situation de découverte : combien de paquets de billes ?

Il s'agit de chercher le nombre total de paquets.
Un enfant a dans un sac soixante–quinze billes. Il les range par paquets de cinq. Combien de paquets a–t–il faits ?
Problème de division quotition

10. Préambule du Tableau des progressions pour le CP et le CE1.
11. Socle commun de connaissances et de compétences – décret n° 2006–830 du 11 juillet 2006.

Retour au sommaire

La taille des nombres est volontairement choisie de façon à ce que le nombre d'itérations (additions ou soustractions) soit élevé, la représentation schématique soit fastidieuse, le tout engendrant une dépense en temps importante. Elle constitue donc un obstacle qui va obliger l'élève à dépasser ces types de procédures initiales. Quant aux élèves qui font appel spontanément à la multiplication à trous et l'effectuent correctement (répertoire automatisé), l'objectif est de leur faire découvrir une écriture équivalente en introduisant une nouvelle opération, la division, et le signe qui l'accompagne « : ». Cette capacité à exprimer des formulations différentes et équivalentes fonde le concept opératoire.
Exemples de procédures correctes susceptibles d'être observées :
– trace écrite comportant le résultat « 15 » : l'élève fait appel à un schéma et/ou une écriture chiffrée et procède soit à :
– une addition réitérée du nombre 5 (ou comptage de 5 en 5) jusqu'à obtenir 75 ;
– une soustraction réitérée du nombre 5 (ou décomptage de 5 en 5) jusqu'à obtenir 0 ;
– une multiplication à trou (« 75 = 5 x ? » ou « 75 = ? x 5 »), voire parfois une division (« 75 : 5 ») ;
– une décomposition additive et/ou multiplicative du nombre 75 ;
– absence de trace écrite : l'élève procède mentalement et donne oralement le résultat « 15 ».
Exemples de procédures erronées éventuelles ou d'erreurs provenant lors de la mise en œuvre d'une procédure correcte :
– bonne compréhension de l'énoncé, mais l'élève fait des erreurs de comptage et/ou des erreurs dans le nombre d'itérations ou oublie au fur et à mesure de sa procédure ce qu'il cherche ou utilise à mauvais escient le symbolisme mathématique (en particulier le signe égal).
– mauvaise compréhension de l'énoncé : l'élève s'empare de façon aléatoire des nombres 75 et 5 et effectue une addition ou une soustraction en allant au plus simple ou une multiplication ou une division en réponse aux attentes du moment de l'enseignant.
Comme pour les situations précédentes, la nécessaire élaboration d'une trace écrite collective peut s'effectuer à la suite de cette recherche ou dans un temps différé.
Autre exemple de situation de découverte :

> Il s'agit de chercher le nombre de cartes par joueur.
> *Un jeu contient cinquante–deux cartes. Il y a quatre joueurs. Chaque joueur reçoit le même nombre de cartes. Combien de cartes reçoit chaque joueur ?*
> Problème de division partition

2. Situations d'entraînement

> Il s'agit de chercher le nombre total de boîtes.
> *La fermière a dans son panier quatre–vingt–quatre œufs. Elle les range dans des boîtes de six. Combien de boîtes à œufs a-t-elle remplies ?*
> Problème de division quotition

Retour au sommaire

Il s'agit de chercher le nombre de pièces par équipier.
Un pirate partage équitablement ses cent quatre–vingt–trois pièces d'or entre ses trois équipiers. Combien de pièces d'or reçoit chaque équipier ?
Problème de division partition

Sont exposés ici des problèmes de division pour lesquels le reste est nul (cas particulier de division euclidienne). Mais il faudra aussi aborder des situations de division qui génèrent des restes au sein de problèmes de groupements particuliers et de partage non équitable.
De même que pour les situations de découverte, les traces écrites collectives sont amenées à évoluer en fonction des procédures mises en œuvre par les élèves.

3. Différenciation

Les procédures erronées recensées en CP s'ancrent en CE1 pour les élèves fragiles ou en difficulté (compréhension encore difficile de la situation, enfermement dans la mécanisation). En outre, l'explicitation régulière par l'élève de sa procédure permet à la fois de contourner l'idée d'une magie du résultat et de déceler les erreurs de raisonnement masquées par un résultat juste.
L'élève détourne souvent l'emploi de la multiplication ou de la division par l'utilisation d'une addition ou d'une soustraction réitérée. Pour amener l'élève à dépasser ces types de procédures :
– l'enseignant propose un entraînement régulier à l'écriture de séries d'additions réitérées sous la forme de produits ;
– l'enseignant augmente la taille des nombres figurant dans l'énoncé du problème (les calculs additif et soustractif deviennent alors coûteux et sources d'erreurs) ;
– l'enseignant propose une comparaison des diverses procédures de résolution, pour mettre en avant les notions de fiabilité, de rapidité et de simplicité.
L'élève a tendance naturellement à contourner l'utilisation de la division par l'emploi d'une multiplication à trous. Pour amener l'élève à s'approprier l'équivalence entre ces deux opérations, l'enseignant peut proposer un entraînement régulier de passage d'une écriture à l'autre, en vue de familiariser progressivement l'élève avec le signe « : ».
L'automatisation des tables de multiplication est indispensable à la résolution des problèmes de groupements et de partage. Pour favoriser l'approche de la division, l'élève doit être habitué à manipuler ces tables sous des formulations diverses (par exemple combien fait 4 fois 3 ?, en 12 combien de fois 4 ?, combien fait 3 fois 4 ?, en 12 combien de fois 3 ?).

Conclusion

En référence à la théorie des champs conceptuels (structures additives et multiplicatives), ce chapitre vise à apporter un éclairage à la fois didactique et pédagogique sur les choix d'enseignement à opérer par les maîtres.
L'apprentissage de la résolution de problèmes doit s'inscrire dans la durée. Il commence dès l'école maternelle, se poursuit tout au long de la scolarité primaire et au–delà. Afin d'en assurer la cohérence et la continuité, et ainsi d'en renforcer la lisibilité chez les élèves, les équipes enseignantes s'attacheront à leur proposer un « parcours résolution de problèmes », tout comme elles proposent un parcours

Retour au sommaire

culturel, sur toute la durée de leur scolarité. Ceci nécessite de discuter ensemble de la progression des concepts inhérents à cet apprentissage à travers les trois cycles, et de mettre en place des outils communs qui évolueront d'une classe à l'autre.
Travailler la typologie des problèmes et donner aux élèves les clés pour les reconnaître, et ce quel que soit leur habillage, c'est leur permettre de s'autoriser à s'engager dans une démarche de recherche. Car faire des mathématiques, c'est chercher. Or, pour chercher, les élèves ont besoin d'outils disponibles à tout moment. Ils doivent donc les mémoriser et cet enjeu doit leur être explicité. Ainsi l'effort demandé de mémorisation en vue d'acquérir des automatismes, sera d'autant mieux accepté que l'élève comprendra que le chemin est balisé.
Cet apprentissage doit également être ponctué de moments spécifiques identifiés à la fois par le maître et par l'élève : ce dernier découvre (situation de découverte), s'entraîne (situations d'entraînement en contexte, hors contexte, sur plusieurs types de problèmes), élabore une trace écrite qui enrichit à la fois le recensement des différentes structures de problèmes et des divers types de procédures utilisées, est évalué, réinvestit enfin pour entretenir la connaissance et la compétence.
Au cours de ces différentes phases, l'enseignant veillera à apporter des aides spécifiques en réponse à des besoins identifiés grâce à des outils d'évaluation formalisés en équipe. La phase d'évaluation individuelle régulière, orale et/ou écrite, demeure fondamentale car elle est la seule garante des acquisitions réelles de l'élève et permet la régulation des différentes modalités d'aide pour assurer le suivi des élèves repérés les plus fragiles.

Retour au sommaire