

## Débuter la numération

Gabriel Le Poche

Ce texte a pour objet de préciser les objectifs que l'on peut viser concernant la connaissance des nombres entiers en grande section d'école maternelle puis en cours préparatoire et en cours élémentaire première année.

Il a également pour but de fournir aux enseignants des pistes d'activités permettant d'évaluer, de construire puis de consolider les connaissances dans le domaine de la numération décimale.

### Principes essentiels de la numération décimale

La numération décimale est un système de désignation des nombres qui utilise la base dix.

La numération écrite : le système écrit de désignation des nombres utilise dix symboles, les chiffres (1, 2, ..., 9, 0) et un ensemble de règles que l'on applique systématiquement permettant de les agencer pour désigner tous les nombres entiers.

La numération orale : le système oral de désignation des nombres utilise un certain nombre de mots (un, deux, trois, ... seize, vingt, ... cent, etc.) et un ensemble de règles, plus complexe que celui de la numération écrite, qui permet de les combiner pour former de nouvelles désignations (ex : dix-sept, cent deux, deux cents, quatre-vingt-dix-huit...).

**Notre système<sup>1</sup> de numération écrite** est un système positionnel de base dix avec un zéro qui peut s'analyser de plusieurs manières. Nous illustrons, dans un premier temps, notre étude du système sous son aspect sémantique en faisant référence à un matériel de type « groupement ».

**Le système est de base dix** : les groupements sont réguliers et sont toujours effectués par paquets de dix, d'abord par paquets de dix (groupements de premier ordre) puis par paquets de paquets de dix – les paquets de cent – (groupements de deuxième ordre) et ainsi de suite.

**Le système est positionnel** : la place du chiffre dans l'écriture du nombre lui donne une signification différente. Dans des écritures utilisant deux chiffres, 12 et 21 ne désignent pas le même nombre d'objets : dans l'écriture 12, le 1 désigne un paquet de dix objets – groupement de premier ordre – et le 2 deux objets isolés alors que dans l'écriture 21, le 2 désigne maintenant deux paquets de dix objets et le 1, un objet isolé.

Dans une écriture à trois chiffres, le chiffre situé à gauche de l'écriture indique le nombre de paquets de cent, le deuxième le nombre de paquets de dix et le troisième le nombre d'objets non regroupés.

237 signifie qu'il y a 2 paquets de cent objets, 3 paquets de dix objets et 7 objets isolés.

**Le système possède un zéro** qui indique l'absence de groupements d'un certain ordre. Dans 401 le 0 signifie qu'il n'y a pas de paquets de dix isolés.

**Des irrégularités dans notre système de numération orale** : si notre système de numération orale était en parfaite correspondance<sup>2</sup> avec notre système écrit, il

1. Le nombre qui s'écrit  $abc$  en base dix, avec les chiffres  $a$ ,  $b$  et  $c$  concaténés dans cet ordre, est le cardinal d'une collection constituée par la réunion de  $a$  groupements de cent éléments, de  $b$  groupements de dix éléments et de  $c$  éléments non regroupés ( $abc^{dix} = (a \times dix^2) + (b \times dix) + c$ ).
2. Cette correspondance existe dans le système chinois ce qui le rend plus accessible aux élèves concernés.

pourrait, de la même façon, n'y avoir que les dix mots-nombres : un, deux, ... neuf, zéro, correspondant aux dix chiffres de notre système écrit, mais ce n'est pas le cas. Il faut remarquer que le système utilise au départ des mots spécifiques pour les premières puissances de la base dix ce qui permet de mieux appréhender le rôle de ces nombres : dix, cent, mille mais que le système semble utiliser comme base auxiliaire mille lorsqu'il s'agit de poursuivre les règles de désignation dix mille, cent mille puis million.

#### **Une première irrégularité : les mots-nombres de onze à seize**

Comme le nombre 17 se lit dix-sept, les nombres de 11, ... 16 pourraient se lire dix-un, ...dix-six mettant ainsi en évidence que dans une écriture à deux chiffres commençant par 1 le 1 désigne un paquet de dix.

Ainsi le fait que les nombres de 11 à 16 aient une désignation orale n'utilisant qu'un seul mot-nombre ne facilite en rien la compréhension du système écrit.

#### **Une seconde irrégularité : le nom des dizaines**

Les trois premiers groupements successifs par dix sont nommés de façon spécifique : dix, cent et mille pour permettre une compréhension plus aisée du rôle de la base dix dans la lecture de 200 : deux cents, 3 000 : trois mille, 4 500 : quatre mille cinq cents et ainsi 20, 30, 40, 50, 60 pourraient de la même manière se lire : deux dix, trois dix, quatre dix, ... six dix au lieu de vingt, trente, quarante... soixante.

Comme le système utilise des mots-nombres spécifiques pour les noms des premières dizaines : vingt<sup>3</sup>, trente, quarante, cinquante, soixante, on pourrait poursuivre en utilisant les mots septante, octante, nonante, comme dans certains pays francophones.

En France, les désignations de 70, 80 et 90 par soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix ne respectent pas les règles de composition des premières désignations orales à l'aide des mots-nombres de base et sont la source de difficultés supplémentaires.

### Analyse du système écrit

#### Point de vue algorithmique

Il s'agit de mettre en évidence deux éléments.

**Le procédé de fabrication de la suite des écritures chiffrées** et en particulier celui du successeur d'une écriture chiffrée quelconque.

Les chiffres se succèdent dans l'ordre : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et 9.

Pour trouver le successeur d'un nombre écrit, le procédé est le suivant : prendre le successeur du chiffre de droite.

R1 – si ce successeur n'est pas 0, alors le procédé est terminé ;

R2 – si ce successeur est 0, alors il faut prendre le successeur du chiffre immédiatement à gauche et utiliser à nouveau la règle R1 ou R2.

*Remarque : la description de ce procédé suppose que les écritures chiffrées comportent un zéro comme chiffre le plus à gauche.*

#### **Les régularités de la suite des écritures chiffrées**

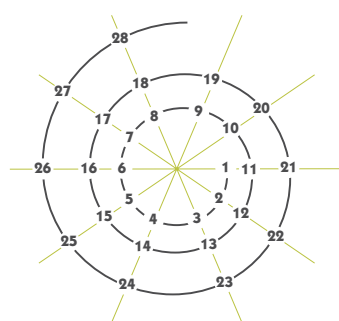
Dans la suite des écritures, les périodes dix et cent jouent des rôles importants.

Pour une écriture à deux chiffres, dans la suite des successeurs, selon une périodicité de dix, on obtient à nouveau le même chiffre de droite (ex : 24, puis 34, 44, 54, 64, etc.).

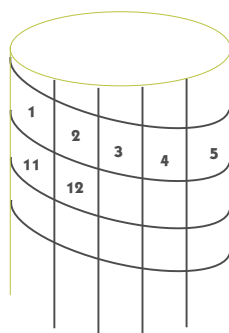
Pour une écriture à trois chiffres, dans la suite des successeurs, selon une période de cent, on obtient à nouveau les mêmes deux chiffres à droite et les chiffres le plus à gauche se succèdent dans l'ordre usuel (ex : 175, 275, 375, 475, etc.).

3. Le mot « vingt » n'a pas de relation avec « deux » et n'aide donc pas au fait de savoir que dans 20 il y a 2 paquets de dix, les mots « trente » et « trois » commencent quant à eux de la même manière.

**Matériels associés** : les bandes numériques disposées en ligne (lecture de gauche à droite) ou en colonne (lecture de haut en bas) pour percevoir l'algorithme, les tableaux rectangulaires de dix colonnes, les spirales et rouleaux en spirales de période 10 pour visualiser les régularités, les calculettes, les compteurs... Ces différents matériels sont complémentaires et peuvent servir de support à des problèmes.



dominos

rouleau  
en spirale

			1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	22	22	23				

tableau rectangulaire de dix  
colonnes (remarque : la position  
de 1 est variable)

### Point de vue sémantique

Il s'agit de donner du sens aux chiffres en fonction de leur position dans l'écriture du nombre.

Cette compétence s'avère fondamentale pour l'apprentissage puis la maîtrise des différentes formes de calcul.

#### 1. Des activités de dénombrement<sup>4</sup> : matériel de « type groupements »

Comme l'une des premières utilisations du nombre est de désigner une quantité, il est légitime de privilégier, dans un premier temps, la tâche de dénombrement et le vocabulaire qui lui est associé.

Une procédure de dénombrement consiste à regrouper les éléments par paquets successifs de dix, d'abord les paquets de dix, puis les paquets de paquets de dix, etc. Les élèves auront plus de facilité à comprendre l'écriture du nombre en retrouvant, dans le vocabulaire utilisé par le professeur, les actions effectuées pour réaliser cette tâche.

Ex : 243 doit alors pouvoir être interprété comme :

- 2 paquets de cent et 4 paquets de dix et 3 éléments isolés<sup>5</sup> ;
- 24 paquets de dix et 3 éléments isolés ;
- mais aussi 23 paquets de dix et 13 éléments isolés ou 1 paquet de cent, 33 éléments isolés et 11 paquets de dix, etc.

4. Le dénombrement d'une collection est une tâche qui consiste à fournir, à l'oral ou à l'écrit, le nombre d'éléments de cette collection. Plusieurs procédures sont possibles, en particulier les procédures qui utilisent les comptages par paquets de dix.

5. Certains enseignants préfèrent utiliser le vocabulaire « tout seul ».

**Matériels associés** : des bâtonnets regroupés par paquets de dix à l'aide d'élastiques ou des cubes mis par dix dans des sachets transparents conviennent bien à la pratique fondamentale de ce type d'activité de dénombrement.

Des cubes emboîtables sous formes de barres, puis de plaques et de gros cubes permettent respectivement de bien visualiser le groupement de dix<sup>6</sup> (la dizaine comme une barre de dix cubes), le groupement de cent (la centaine comme une plaque de dix barres) et le groupement de mille (le millier comme un gros cube de dix plaques).

## 2. Des activités de recherche de la valeur : matériel de « type échanges »

Le nombre entier intervient également comme mesure de grandeurs discrètes.

Par exemple pour indiquer un prix à l'aide de l'unité euro, un objet de valeur 243 euros doit pouvoir être interprété comme ayant la même valeur que :

– 2 objets de valeur cent euros et 4 objets de valeur dix euros et 3 objets de valeur un euro ;

– 24 objets de valeur dix euros et 3 objets de valeur un euro ;

– mais aussi, 23 objets de valeur un euro et 22 objets de valeur dix euros, etc.

Pour les élèves, une difficulté réside dans la distinction entre quantité et valeur. Il faut en effet comprendre qu'un objet de valeur dix peut valoir dix objets de valeur un, qu'un objet de valeur cent peut valoir dix objets de valeur dix, qu'un objet de valeur cent peut valoir cent objets de valeur un.

Exemple :

A 

1	1	1
---	---	---

 la quantité est 3, la valeur est 3

B 

1	10
---	----

 la quantité est 2, la valeur est 11

Pour certains élèves, la valeur de la collection A est supérieure à la valeur de la collection B car la collection A contient plus d'éléments que la collection B. Les élèves ont tendance à comparer les quantités au lieu des valeurs.

Pour différencier la valeur de la quantité, les professeurs pourront donc mettre en place des activités de recherche de valeur mettant en jeu des échanges, c'est leur fréquence qui permettra aux élèves d'atteindre cet objectif.

**Matériels associés** : des plaques, exactement de même aspect<sup>7</sup>, munies des écritures symboliques 1, 10 et 100 qui leur confèrent une valeur et qui constituent le matériel de base nécessaire à ce type d'activité.

Il existe de nombreux matériels où forme, taille, couleur, position... signifient la valeur<sup>8</sup>.

Il convient de signaler l'abaque triangulaire et le boulier chinois.

Les abaqués triangulaires sont des abaqués à boules identiques où les mâts peuvent recueillir plus de dix boules. Chacun des trois mâts est identifié par les symboles respectifs u, d et c.

6. Le matériel « multi-base » en bois permet aux élèves de remplacer un groupement de dix cubes par une barre de dix où les dix petits cubes sont encore visibles, de même pour les plaques et les gros cubes. C'est un matériel intermédiaire entre les groupements et les échanges.

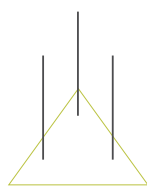
7. Le matériel est présenté dans l'exemple ci-dessus. Il convient que les élèves n'utilisent que l'écriture symbolique pour donner une valeur à un objet, évitant ainsi d'associer une valeur à une couleur, une taille ou une forme.

8. Le système monétaire en usage en Europe cumule écriture symbolique, taille et couleur.

La quantité de 18 boules présente l'intérêt de pouvoir déposer sur un mât un nombre de boules correspondant à la somme  $9 + 9$  avant d'effectuer l'échange qui convient. La disposition spatiale triangulaire, évite de retrouver l'ordre usuel centaines, dizaines, unités qui peut masquer une incompréhension des élèves. Il faut éviter une effectuation mécanique des tâches d'échange : le fait que les boules soient identiques oblige à la réflexion.

L'intérêt principal du boulier chinois est d'utiliser la valeur intermédiaire cinq et de permettre plusieurs représentations d'une même valeur.

Ainsi 10 peut être représenté par 1 boule de valeur dix ou 2 boules de valeur cinq ou 1 boule de valeur cinq et 5 boules de valeur un (ici 80 000 est représenté par une boule de valeur 50 000, deux boules de valeur 10 000 et deux boules de valeur 5 000).



abaque triangulaire



boulier chinois

### Progression

Avant d'énoncer des objectifs possibles à atteindre par niveau de classe, nous formulons quelques éléments de repère dans la progression-programmation en numération qui ne peut être envisagée sans relation avec le calcul.

En ce qui concerne la numération écrite :

- en GS, la désignation usuelle d'un nombre familier, dans le domaine de 1 à 31, reste un symbole non analysé, donc non compris. Elle s'acquiert par imprégnation ;
- l'algorithme de fabrication de la suite des écritures chiffrées peut être approché dès la GS ;
- la compréhension de la signification des chiffres dans l'écriture usuelle (aspect sémantique) est à réserver au CP et doit être approfondie au CE1. Elle s'appuie d'abord sur du matériel de « type groupements » avant d'utiliser, dès le CP, du matériel de « type échanges ».

Au CP, la dextérité dans le domaine des calculs additifs, le début des calculs soustractifs supposent une bonne compréhension de la numération et la connaissance de faits additifs et soustractifs mémorisés.

Les transformations d'écritures additives ne nécessitent pas la connaissance d'une technique opératoire de l'addition et sont donc à pratiquer dès l'introduction du signe +.

### Le calcul mental

Au CP, il convient avant tout de développer la pratique de ce type de calcul.

Exemples

Le calcul de  $6 + 7$  peut s'effectuer à l'aide de plusieurs procédures : par appui sur le double  $6 + 6$  soit 12, par appui sur les 5 que l'on regroupe pour avoir 10, ou à l'aide du passage par 10 en décomposant le 7 en  $4 + 3$  ou le 6 en  $3 + 3$ .

Nous pouvons supposer qu'en multipliant les occasions de reconstruire ce résultat l'élève mémorisera le fait que « six et sept font treize ».

Le calcul de  $65 + 43$  ne nécessite pas de « poser l'opération » (calcul écrit en colonnes) pour conclure qu'il s'agit de 10 de dix dizaines et 8 unités soit 108.

Au CE1, le calcul mental, avec ou sans support écrit, est à poursuivre dès le début de l'année scolaire (calculs de sommes et de différences). Cet aspect du calcul permet aux élèves d'acquérir la maîtrise de la compréhension du système de numération.

### Exemples

- Le calcul de  $238 + 69$  peut s'effectuer, sans support écrit, en interprétant 69 comme 7 dizaines moins 1. La somme est alors de 30 dizaines ( $23 + 7$ ) et de 7 unités ( $8 - 1$ ) soit 307.
- Le calcul de  $126 - 87$  peut s'effectuer à l'aide d'un support écrit :



– en calculant, à l'aide de « petits sauts », l'écart entre les 2 repères 87 et 126 :  $13 + 26 = 39$  ;

– en effectuant une translation de l'écart qui rend le calcul plus aisé, écart entre 129 et 90 soit 39.

### Le calcul posé (« les techniques opératoires »)

L'enseignement de techniques opératoires pour l'addition, la soustraction et la multiplication en CP et en CE1 se fait toujours en leur donnant du sens.

Par la réflexion qu'elle exige, l'élaboration d'une technique opératoire avec la possibilité laissée, dans un premier temps, aux élèves d'utiliser des dispositions intermédiaires, favorise la compréhension du système de numération.

Cet enseignement gagnerait en efficacité s'il était réalisé en liaison avec une situation de référence utilisant le matériel de numération en usage dans la classe.

### Exemples de dispositions de calculs posés

#### Addition

Dispositions intermédiaires<sup>9</sup> (le vocabulaire choisi ici fait référence à un matériel de type groupements<sup>10</sup>)

Paquets de dix	Tout seul	Paquets de dix	Tout seul	Paquets de dix	Tout seul
+ 3	4	+ 3	4	+ 3	4
4	7	4	7	4	7
+ 7		+ 1	1	7	11
1	1	7		8	1
8	1	8	1		
Calculs développés de gauche à droite (a)		Calculs développés de droite à gauche (b)		Calculs développés de façon indifférente (c)	

Dans les dispositions intermédiaires proposées, le trait en gras correspond à une transformation réalisée sur les collections. Dans la disposition (c), les 2 sous-

9. Les dispositions intermédiaires ne constituent pas des passages obligés et restent liées au choix de la technique à fixer. Elles sont présentées ici pour fournir aux enseignants des pistes de réflexion.

10. Il est possible de choisir un autre type de matériel de référence en particulier du matériel de type échange (plaques avec les écritures 1 et 10, boules sur des abaques triangulaires). Le vocabulaire sera donc à adapter en conséquence.

ensembles (3 paquets de dix et 4 tout seul et 4 paquets de dix et 7 tout seul) sont, dans une première transformation, réunies en 7 paquets de dix et 11 tout seul puis dans une seconde transformation les 11 tout seuls sont groupés en 1 paquet de dix et 1 tout seul pour former 8 paquets de dix et 1 tout seul. Les dispositions (a) et (b) ne sont pas identiques : dans la disposition (a), on écrit d'abord le nombre de paquets de dix ; dans la (b), ce sont les 11 tout seuls qui sont d'abord transformés en un paquet de dix et 1 tout seul.

Paquets de dix	Tout seul	Paquets de dix	Tout seul	Paquets de dix	Tout seul
+ 3	4	+ 3	4	1	
4	7	4	7	+ 3	4
7 8	1	1 8	1	4	7
				8	1
Technique de gauche à droite (a)		Technique de droite à gauche (b)		Technique traditionnelle française avec retenue (c)	

Choix d'une technique<sup>11</sup> à fixer

Les techniques (a) ou (b) ne comportent pas de retenue : dans la technique (a), le sens de la lecture de gauche à droite est respecté, d'abord le calcul des 3 + 4 soit 7 paquets de dix ; dans la technique (b), on calcule d'abord les 4 + 7 soit 11 tout seuls transformés en 1 paquet de dix et 1 tout seul.

La technique (c) est la technique usuelle en France.

### Soustraction

Paquets de dix	Tout seul	Paquets de dix	Tout seul	Paquets de dix	Tout seul	Paquets de dix	Tout seul
<del>7</del> 6	1 4	7	4	7	4	7	1 4
- 3	6	1		- 1		- 3	6
3	8	+ 3	6	3	6	1	
		3	8	3	8	3	8
Technique anglo-saxonne de droite à gauche (transformation du premier terme)		Disposition intermédiaire de l'addition à trous (issue de la technique traditionnelle de l'addition)		Technique de l'addition à trous		Technique traditionnelle française avec retenue (différences égales)	

Choix d'une technique à fixer

Il est essentiel de fixer une technique de calcul et de s'y tenir durablement.

### Les objectifs par niveau de classe

Attention, si les objectifs énumérés ci-dessous correspondent effectivement à des objectifs principaux qu'il est possible d'atteindre au cours de l'année de classe du niveau concerné, il ne faut pas considérer que la lecture du tableau de haut en bas constitue une programmation obligatoire des objectifs au cours de l'année scolaire.

11. Il est de la responsabilité de l'enseignant de choisir la technique qui leur semble la plus appropriée. La technique choisie gagnerait à être identique en CP et CE1. Il n'y a pas lieu d'enseigner plusieurs techniques car la technique devra être automatisée pour être disponible dans la résolution des problèmes.

Niveaux	Compétences des programmes	Objectifs	Commentaires sur le repérage des connaissances et les difficultés rencontrées	Pistes d'activités Construction des connaissances et leur consolidation
GS	Mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30.	Savoir réciter la comptine numérique de 1 en 1 jusqu'à n.	Repérer la partie stable et conventionnelle de la suite numérique orale au cours d'une interrogation individuelle ou lors d'activités de comptage un par un. L'enseignant pourra constater des omissions systématiques ou l'invention de régularités inexistantes en particulier lors des changements de logique (de seize à dix-sept ou de dix-neuf à vingt par exemple), constater si la partie stable est disponible à partir d'un rang quelconque.	Les occasions de dénombrement par comptage sont à privilégier (situations rituelles : dénombrement des présents, des élèves qui mangent à la cantine, et situations fonctionnelles : recherche d'un nombre d'objets nécessaires à une activité...). L'utilisation de multiples comptines numériques, de jeux de doigts, d'autres jeux aide à la maîtrise de cette connaissance. Des situations destinées à certains élèves ayant des difficultés persistantes sont à mettre en place (par exemple, le plaisir d'énoncer la comptine jusqu'au rang n : « la fusée »).
GS	Dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus.	Savoir dénombrer une quantité à l'aide d'un comptage de un en un de la collection. Savoir réaliser une collection de n éléments en utilisant le comptage de un en un.	Au cours d'activités ou lors d'un entretien individuel, l'enseignant peut repérer les erreurs commises. Les principales erreurs sont les suivantes : non-connaissance de la comptine numérique, principe cardinal manquant, difficultés d'énumération, non-correspondance d'un mot-nombre à un objet... ; elles sont bien souvent cumulées.	Il est souvent indispensable de proposer aux élèves des activités spécifiques : – l'énonciation du nombre d'objets par reconnaissance visuelle de collections organisées avant leur comptage permet d'acquiescer le principe cardinal ; – introduire, par un trou, un bâtonnet dans une boîte fermée (pour un lot d'environ 15 boîtes) oblige l'élève à développer des procédures d'énumération (« les boîtes ») ; – l'introduction d'un mot après chaque mot nombre énoncé de la comptine numérique, le changement de rythme au cours de l'activité de comptage suffit souvent à l'élève pour associer un seul mot-nombre à l'objet pointé.
GS	Associer le nom de nombres connus avec leur écriture chiffrée.	Savoir associer directement le mot-nombre dit ou écrit et son écriture chiffrée pour les nombres de 1 à 9. Savoir associer directement – sans comptage – le mot-nombre, son écriture chiffrée à une collection organisée en constellation. Savoir associer directement – sans comptage – le mot-nombre, son écriture chiffrée à une collection standard de doigts (de un à dix). Savoir associer, avec l'aide de l'outil « bande numérique », les mots nombres de la comptine numérique de un à trente à l'écriture chiffrée correspondante. Savoir produire la suite des écritures chiffrées des nombres de 1 à 9.	Des entretiens individuels permettent de faire le point sur les connaissances des élèves. Pour l'enseignant, il s'agit alors de privilégier les entraînements systématiques qui seuls permettront l'acquisition des connaissances visées.	L'affichage de référents collectifs : l'un associant différentes représentations des premiers nombres (constellations, doigts, collections témoins organisées par groupes de 5), écriture chiffrée et écriture littérale, l'autre constituée d'une bande numérique de 1 à 31 facilitent l'acquisition des apprentissages visés. Leurs usages fréquents sont déterminants pour fixer ces connaissances de base. L'enseignant a intérêt à munir chacun de ses élèves de ces outils individuels que les élèves utiliseront seuls ou avec l'aide du maître au cours d'activités aussi variées que possible : « cartons-éclair », lotos, et dominos par exemple. Seul un entraînement systématique, au cours d'activités rituelles, où les élèves doivent produire dans l'ordre la suite numérique des chiffres de 1 à 9, d'abord à l'aide de l'outil bande numérique puis sans sa présence, permettra de mémoriser la succession des écritures chiffrées (ex « le fil à linge »).



Niveaux	Compétences des programmes	Objectifs	Commentaires sur le repérage des connaissances et les difficultés rencontrées	Pistes d'activités Construction des connaissances et leur consolidation
CP	Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100.	Savoir associer automatiquement, grâce à la mémorisation, les désignations orales et écrites (en chiffres) des nombres familiers de 1 à 31. Savoir associer désignations orales et écrites des nombres de 1 à 59 en utilisant les repères mémorisés vingt, trente, quarante et cinquante. Savoir associer désignations orales et écrites des nombres de 60 à 79 en utilisant les décompositions additives en deux termes de ces nombres qui donnent du sens à la numération orale.	Avant chaque unité d'apprentissage, il convient d'établir un diagnostic de l'état des connaissances de chaque élève afin de repérer ceux qui auront le plus besoin du soutien de l'enseignant. Étant donné la non-régularité de notre numération orale, ce type de connaissances ne peut s'acquérir que progressivement, tout au long de l'année scolaire. Il est donc tout à fait légitime que la correspondance numération écrite-numération orale ne soit pas acquise pour tous dans la tranche 80-99 qui nécessite, pour sa compréhension, d'utiliser des décompositions multiplicatives des nombres ex : $92 = (4 \times 20) + 12$ .	Ces connaissances ne sont pas procédurales – il s'agit d'apprendre des conventions – et s'acquièrent donc dans le cadre d'un enseignement du professeur. Celui-ci concevra donc des outils qui faciliteront cette mémorisation indispensable [ex : les dictionnaires des nombres où les nombres sont organisés par famille comme celle des 50 (cinquante « nombres dont l'écriture commence par un 5 »)].  Les décompositions additives permettent de donner du sens aux nombres de la famille des 70 (soixante-dix).
CP		Savoir utiliser le dénombrement par paquets pour transmettre une information sur la quantité.  Savoir dénombrer une quantité d'objets pour produire une désignation écrite ou orale en les groupant d'abord par paquets de dix objets puis en dénombrant le nombre de paquets de dix et le nombre d'objets isolés.	La difficulté provient du fait que le nombre est presque exclusivement signifié par sa désignation usuelle, ce qui conduit l'élève à réciter la comptine aussi loin que possible pour produire cette désignation orale puis son écriture usuelle. Le fait de donner une information sur une quantité à l'aide d'une désignation additive (par exemple 15 comme « 8 et 7 », « 5 + 5 + 5 », « dix et cinq », ...) conduit l'élève à percevoir une collection comme plusieurs groupements et non plus élément par élément. La procédure de comptage « un à un » avec utilisation de la comptine numérique ne devrait pas être encouragée au-delà de trente car elle ne favorise pas les groupements par dix pour dénombrer. Il convient d'étudier au préalable les procédures qu'utilisent les élèves pour dénombrer des collections supérieures à cinquante objets. Il faudrait que tous les élèves de ce niveau automatisent la procédure reconnue comme fiable, rapide et efficace : grouper par dix pour dénombrer une grande collection.	L'activité « la marionnette » qui oblige l'élève à construire cette connaissance est la suivante : il s'agit de passer une commande écrite à une marionnette qui ne connaît que les nombres à un chiffre. Il peut s'agir par exemple d'une commande de pailles pour que chaque gobelet en possession de l'élève ait sa paille (la commande écrite de 12 pailles est interprétée par la marionnette comme désignant une quantité de 1 et 2 soit 3, les procédures de réussite sont obtenues en décomposant additivement 12 en deux ou plusieurs termes strictement inférieurs à 10 : 4 + 8, 5 + 5 + 2 etc.)  Comme les groupements réguliers et par dix ne constituent pas le mode unique de regroupements, le professeur doit enseigner cette manière de grouper les objets pour les dénombrer qui n'est pas utilisée spontanément par les élèves. Le « dénombrement de grandes collections » (supérieures à 300) oblige les élèves à bien comprendre le rôle des groupements par dix et permet d'introduire les groupements de deuxième ordre (la centaine) sans que cette introduction constitue une obligation des programmes (l'enseignant peut se contenter de nommer 341 comme 34 paquets de dix objets et 1 objet isolé).



Niveaux	Compétences des programmes	Objectifs	Commentaires sur le repérage des connaissances et les difficultés rencontrées	Pistes d'activités Construction des connaissances et leur consolidation
CP		<p>Savoir que dans une écriture à deux chiffres d'un nombre, désignant une quantité le chiffre de gauche indique le nombre de groupes de dix et le second le nombre d'objets isolés.</p>	<p>Pour repérer cette connaissance, l'enseignant peut, par exemple, demander à l'élève de commander, à l'aide d'un message écrit, une collection de carreaux pour carrelé une pièce de 24 carreaux. Les carreaux sont présentés sous forme de paquets de dix et de carreaux isolés et l'élève a la possibilité de commander des paquets de dix ou des carreaux isolés. Si celui-ci commande 24 carreaux isolés, il n'a pas acquis la connaissance recherchée.</p> <p>La connaissance visée s'enseigne en s'appuyant sur le fait que les élèves maîtrisent souvent déjà la désignation des nombres familiers et connaissent par exemple le fait que 17, « dix-sept » c'est un paquet de dix et encore sept. Il faut donc vérifier si l'élève possède ou non cette connaissance.</p> <p>Tous les élèves devraient pouvoir trouver mentalement l'écriture usuelle de « douze objets et encore deux groupes de dix objets » en s'appuyant sur le fait que dans 12, il y a 1 groupe de dix objets et 2 objets isolés et que par conséquent, il s'agit de 3 groupes de dix objets et de 2 objets isolés soit 32.</p>	<p>Dans le cadre de l'activité « carrelages », pour construire la connaissance recherchée, l'enseignant modifie la valeur d'une des variables de la situation : il fixe une contrainte supplémentaire. En interdisant la commande de plus de 9 carreaux isolés, il oblige l'élève à modifier sa commande initiale qui n'utilisait que des carreaux isolés.</p> <p>Ainsi pour une commande de 56 carreaux, il doit commander 6 carreaux isolés et 5 paquets de dix carreaux, il suffit ensuite de faire remarquer aux élèves que la désignation de la quantité donne directement ce renseignement. Réciproquement, l'organisation de la collection en paquets de dix et en éléments isolés permet de désigner la quantité d'éléments de la collection (le dénombrement par comptage des paquets de dix est alors suggéré par la situation).</p> <p>Une fois la connaissance construite, les activités de consolidation sont indispensables pour l'automatiser et la stabiliser.</p> <p>Les activités d'entraînement sont d'abord effectuées dans le même contexte que l'activité d'apprentissage ; sans le recours au matériel, de référence mais en proposant des auto-corrrections : compléter des bons de commandes dans différentes configurations spatiales, compléter des égalités du type <math>48 = 8 + \dots</math> etc.</p> <p>Les activités de réinvestissement consistent essentiellement à opérer sur les nombres en effectuant des calculs dans le cadre de problèmes additifs et soustractifs variés.</p> <p>L'activité « carrelages groupés » : en regroupant des collections, la tâche de l'élève est de rechercher la désignation usuelle de la réunion, en fractionnant une collection en deux sous-ensembles, il s'agit pour lui de rechercher le nombre d'éléments d'une partie connaissant la totalité et l'une des parties.</p> <p>L'activité « boîte » : en modifiant par un ajout ou un retrait la collection initiale, la tâche de l'élève est d'anticiper la désignation de la collection finale.</p> <p>Cf. : problèmes additifs et soustractifs.</p>



Niveaux	Compétences des programmes	Objectifs	Commentaires sur le repérage des connaissances et les difficultés rencontrées	Pistes d'activités Construction des connaissances et leur consolidation
CP		<p>Savoir qu'une valeur peut être désignée par une écriture symbolique chiffrée, que la valeur et la quantité sont deux notions indépendantes, plus particulièrement admettre que cinq objets de valeur 1 valent un objet de valeur 5, que dix objets de valeur 1 valent un objet de valeur 10.</p> <p>Savoir que dans l'écriture à deux chiffres d'un nombre, désignant une valeur, la valeur des chiffres dépend de leur position dans l'écriture du nombre.</p>	<p>Lorsqu'on demande aux élèves de comparer deux trésors constitués l'un « A » de trois plaques identiques avec une indication de la valeur 1 sur chaque plaque et l'autre « B » d'une plaque, de même aspect, mais portant l'indication 5, ils sont souvent persuadés que le trésor A vaut plus que le trésor B.</p> <p>Cette erreur, consistant à confondre la valeur et la quantité, persiste pendant très longtemps et il convient donc de proposer aux élèves concernés des situations qui les obligent à effectuer des échanges tout en conservant la valeur.</p> <p>En fin d'année, tous les élèves devraient savoir qu'un objet d'un prix de 56 euros peut être payé à l'aide de 5 billets de dix euros et de 6 pièces de 1 euro.</p>	<p>Pour conforter cette équivalence entre 1 plaque de 5 et 5 plaques de 1, puis entre 1 plaque de 10 et 10 plaques de 1, il convient de confronter les élèves à de nombreux échanges. Il faut les conduire à considérer la valeur 25 comme étant réalisée par 2 plaques de 10 et 5 plaques de 1. L'activité « trésor » permet d'atteindre cet objectif : plusieurs élèves se constituent un trésor de plaques au cours de tirages de cartes indiquant une valeur. Le gagnant est l'élève qui, à la fin de la partie, a le trésor de plus grande valeur. Le fait que le nombre de plaques de 1 soit en nombre limité oblige les élèves à pratiquer des échanges.</p> <p>Pour consolider cette connaissance, l'enseignant peut faire manipuler bouliers et abaques. Il convient également de simuler des achats en utilisant de la monnaie fictive.</p>
CP	<p>Comparer, ranger, encadrer ces nombres. Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.</p>	<p>Savoir que le successeur d'un nombre s'obtient en ajoutant 1 au nombre qui désigne cette quantité ou cette valeur et réciproquement qu'en ajoutant 1 l'on obtient le successeur du nombre.</p> <p>Savoir écrire le successeur de toute désignation écrite d'un nombre à 2 chiffres en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération.</p> <p>Savoir comparer deux nombres de deux chiffres en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération.</p>	<p>Lors d'une situation d'approche pour une évaluation diagnostique, il faut vérifier que l'élève ne s'appuie pas uniquement sur une connaissance mémorisée de la numération orale pour trouver le successeur d'un nombre écrit.</p> <p>Ainsi pour trouver le successeur de 89, au lieu d'avoir comme unique procédure le fait de savoir qu'après quatre-vingt-neuf, c'est quatre-vingt-dix, l'élève devrait pouvoir s'appuyer sur l'une des procédures suivantes.</p> <p>P1 : après 9 c'est 0 donc je prends le successeur de 8 qui est 9 et j'écris 90.</p> <p>P2 : j'ai 8 paquets de dix et 9 éléments isolés, en ajoutant 1, j'ai 10 éléments isolés donc 1 paquet de dix supplémentaire soit 9 paquets de dix qui s'écrivent 90.</p> <p>Pour comparer deux nombres de deux chiffres, il faut d'abord comparer leurs chiffres de gauche, s'ils sont identiques il faut comparer leurs chiffres de droite.</p> <p>Pour conclure que 57 est inférieur à 72, deux types d'explication peuvent coexister :</p> <p>E1 : dans la succession des chiffres 5 vient avant 7 ;</p> <p>E2 : 5 groupes de dix et n éléments isolés constituent une collection moins importante que 7 groupes de dix.</p>	<p>Pour construire l'aspect algorithmique de la numération, une première activité (« château ») consiste à rechercher les nombres cachés d'une grille rectangulaire de n lignes sur 10 colonnes où les nombres se succèdent dans l'ordre habituel de la lecture (de gauche à droite puis de haut en bas). Une autre activité (calculettes) consiste à anticiper le successeur d'un nombre et à vérifier sa prévision à l'aide d'une calculatrice en appuyant sur la séquence de touches (« + » « 1 » « = »).</p> <p>L'appui sur l'aspect sémantique de la numération est construit à travers les situations où une quantité se transforme par l'ajout d'un élément (« boîte ») (contexte cardinal), l'appui sur l'aspect algorithmique est mis en évidence au cours d'un déplacement de 1 sur une piste graduée (« piste graduée »).</p> <p>Les activités de consolidation sont multiples : confection d'une bande numérique, de la spirale des nombres, manipulation de compteurs, mais aussi rangement des nombres, jeux de portraits etc.</p> <p>Il est souhaitable de proposer des activités qui permettent d'observer ce qui se passe sur l'écriture du nombre lorsque l'on ajoute ou retranche 10, ce que devient l'écriture du nombre-repère lorsque l'on se déplace de dix, sur une piste organisée en spirale (« spirales »).</p>

Niveaux	Compétences des programmes	Objectifs
CE1	Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000.	<p>Savoir associer désignations orales et écrites des nombres de 1 à 69 en utilisant les repères mémorisés « vingt », « trente », « quarante » et « cinquante », « soixante ».</p> <p>Savoir associer désignations orales et écrites des nombres de 70 à 99 en utilisant les décompositions complexes (additives et multiplicatives) de ces nombres qui donnent du sens à la numération orale.</p> <p>Savoir utiliser le mot-nombre « cent » pour associer désignations orales et écrites des nombres de 100 à 999 en utilisant les décompositions complexes (additives et multiplicatives) de ces nombres qui donnent du sens à la numération orale.</p> <p>Savoir dénombrer une quantité d'objets pour produire une désignation écrite ou orale en les regroupant d'abord par paquets de dix objets, puis par paquets de dix paquets de dix –les paquets de cent– puis en dénombrant le nombre de paquets de cent, le nombre de paquets de dix et le nombre d'objets isolés.</p> <p>Savoir que dans une écriture à trois chiffres d'un nombre désignant une quantité, le chiffre de gauche indique le nombre de groupements par cent, le second le nombre de groupements par dix et le dernier le nombre d'objets isolés.</p> <p>Savoir que dans l'écriture à trois chiffres d'un nombre désignant une valeur, la valeur des chiffres dépend de leur position dans l'écriture du nombre et introduire les mots « centaine », « dizaine » et « unité » pour parler de la valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture des nombres (maîtriser les décompositions canoniques).</p>
CE1	Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer.	<p>Savoir écrire le successeur de toute désignation écrite d'un nombre à 3 chiffres en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération.</p> <p>Savoir comparer pour les ranger deux nombres de trois chiffres en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération.</p> <p>Savoir encadrer entre des centaines un nombre de trois chiffres, savoir encadrer entre des dizaines un nombre de trois chiffres et en déduire un placement sur un segment gradué de 10 en 10 en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération.</p>
CE1	Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc.	<p>Savoir écrire une suite écrite de mots-nombres ou d'écritures chiffrées ou dire une suite de mots-nombres prononcés en fonction d'une règle donnée en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération ou sur la connaissance de la numération orale.</p> <p>Les suites de 10 en 10 ou de 100 en 100 à partir de n'importe quel nombre constituent un seuil minimum à atteindre par tous les élèves, mais il est souhaitable que l'élève sache produire de la même façon des suites de 5 en 5 et de 50 en 50, de 11 en 11, de 9 en 9...</p>

