ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

FORMATION CONTINUE HG15 2021-2022

MATHÉMATIQUES CYCLE 3

LES FRACTIONS AU CYCLE 3

Essayer de lever les obstacles à la compréhension des fractions

S.TARRIN - CIRCONSCRIPTION DE FONSORBES

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

RAPPELS - Formation de 2017-2018

Math Ésciences 31

MODULE de 9 heures – parcours des enseignants
Des nombres entiers aux nombres décimaux, la place des fractions…

Temps 1 – 3 heures
avec les CPD - CPC - IEN

→

Temps 2 – 4 heures
en équipe
+ accès documents via circonscription

→

Temps 3 – 2 heures
avec le CPC

Partie :

- **théorique**
- **didactique**
- **avec pistes de mises en œuvre pédagogiques**

➢ Analyse d'erreurs
➢ Analyse de vidéos
➢ Ateliers d'appropriation d'outils pour atteindre une compétence

Présentation du déroulé des temps 2 et 3

Lecture personnelle (temps estimé : 1h)
- Documents éduscol « fractions et décimaux »
- Annexes : « cuisenaire, guide-âne, glisse-nombre… »
- Recommandations : conférence de consensus

En équipe (temps estimé : 1h)
Analyse de **vidéos** : « glisse-nombre, comparaison de capacités »

(temps estimé : 30 min)
Visionnage d'un extrait de la vidéo +
Analyse de la vidéo

Mise en œuvre dans sa classe
A partir de 2 activités issues de « situations à placer » CM1 et CM2
Recueil de travaux d'élèves

En équipe (temps estimé : 2h)
Analyse des résultats des travaux d'élèves
Grille d'analyse

(temps estimé : 45 min)
(suite) **Analyse des travaux recueillis**

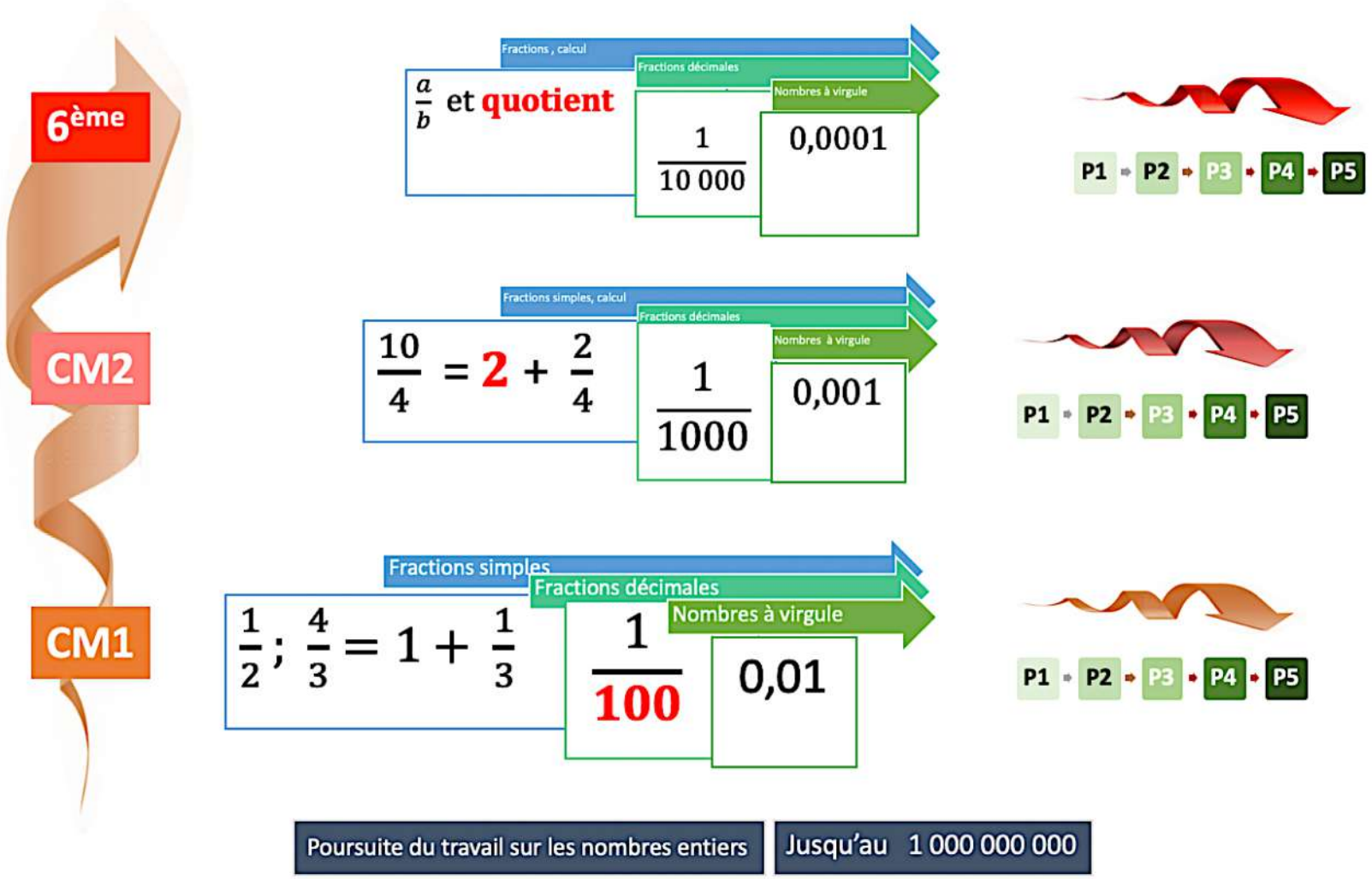
Situation ateliers décimaux + analyse

(temps estimé : 45 min)
Analyse des manuels
Questionner les manuels/ progressions/programmations

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

RAPPELS - Progressivité spiralaire des apprentissages au cycle 3

Idée de « rebrassage », enrichissement, rétroactions permettant de montrer l'apprentissage autrement que comme des étapes successives et sans lien les unes avec les autres.



ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Pourquoi un nouveau module sur l'enseignement des fractions au cycle 3 ?

Contexte : 78% des élèves de 4e ne savent placer $\frac{1}{2}$ sur une droite graduée.

(TIMSS 2019)

Une proportion semblable d'élèves de 4e et une part importante d'adultes ne résolvent pas ce problème :

> Alice dépense $\frac{3}{5}$ de son argent de poche pour acheter un livre.
>
> Elle donne les $\frac{3}{4}$ de ce qui lui reste pour rembourser son frère.
>
> Maintenant, elle n'a plus que 5 €.
>
> Quelle était sa fortune au départ ?

Un apprentissage précoce et structuré permettrait de lever les obstacles liés à cet apprentissage…

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Pourquoi un nouveau module sur l'enseignement des fractions au cycle 3 ?

L'OUVERTURE AUX MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE MATERNELLE ET AU CP (CSEN 02/2021)

Prenons l'exemple des fractions : tous les élèves du monde éprouvent des difficultés à comprendre comment le rapport de deux nombres, comme 1⁄2 ou 3⁄4, représente un nouveau nombre, ce qu'une telle fraction signifie, et comment la manipuler.

Les programmes français introduisent officiellement les fractions très tard, au cycle 3, et les données montrent qu'elles sont encore extrêmement mal maîtrisées à l'entrée en sixième.

Et pourtant, dans la langue naturelle, les mots « moitié » ou « demi » sont appris bien plus tôt, vers 5 ans !

Dès la maternelle, l'enfant peut rencontrer des fractions dans de nombreux contextes concrets, qu'il comprend intuitivement: partager un gâteau en deux moitiés égales, répartir un ensemble en deux groupes égaux, avoir envie d'un demi verre d'eau, acheter à moitié prix... Les mots "tiers", "quart", seront naturellement introduits un peu plus tard. L'intuition précoce, construite dès la maternelle, fonde et facilite l'apprentissage ultérieur des mêmes concepts mathématiques sous une forme plus symbolique et rigoureuse.

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

PRÉSENTATION DES 3 TEMPS

Jeudi 21/10/2021

Temps 1 : 2 heures en présentiel

✓ Ressources institutionnelles et recommandations

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Fractions_et_decimaux/60/1/RA16_C3_MATH_frac_dec_doc_maitre_V2_681601.pdf

✓ Progression de l'apprentissage d'après les travaux de Jean Toromanoff :

- identification des obstacles ;
- mise en œuvre d'un enseignement explicite permettant de lever les difficultés ;
- quelles rencontre avec les nombres non-entiers ?
- les écueils à éviter.

✓ Démarche d'enseignement, séquence et séance d'apprentissage

✓ Mémorisation par répétition à rythme expansé

✓ Mutualisation sur Trello (présentation de l'outil collaboratif)

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

PRÉSENTATION DES 3 TEMPS

Mardi 23/11/2021

Temps 2 : 2 heures en présentiel

- ✓ Programmation dès la fin de P1 en CM1
- ✓ Recensement des tâches et constitution d'un corpus d'activités pour chacune des tâches à partir des manuels et autres ressources utilisées/disponibles
- ✓ Démarche d'enseignement, séquence et séance d'apprentissage
- ✓ Mutualisation sur Trello

Mardi 31/05/2022

Temps 3 : 2 heures en présentiel

- ✓ Retour d'expérience
- ✓ Bilan sur les séquences menées et sur l'efficacité de la démarche
- ✓ Ajustements de la programmation pour le cycle 3

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Ressources institutionnelles et recommandations

1. Programmes du cycle 3 actualisés en 2020

2. Repères annuels de progression de 2018-2019

3. Attendus de fin d'année parus en 2019

4. Recommandations de l'inspection générale

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Programme du cycle 3
actualisé en 2020

éduSCOL
Informer et accompagner
les professionnels de l'éducation

D'après le BOEN n° 31 du 30 juillet 2020

Les thèmes du changement climatique, du développement durable et de la biodiversité doivent être retenus pour développer des compétences en mathématiques et favoriser les liens avec les disciplines plus directement concernées. Une entrée par la résolution de problèmes est à privilégier. Les capacités suivantes peuvent être mobilisées dans ce cadre : utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux ; calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux ; résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux ; comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux: longueur (périmètre), aire, volume, angle ; utiliser les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs ; résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux.

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Programme du cycle 3
actualisé en 2020

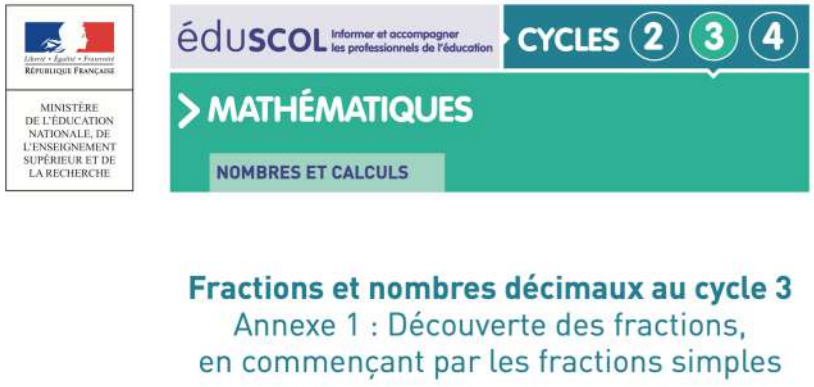
NOMBRES ET CALCUL

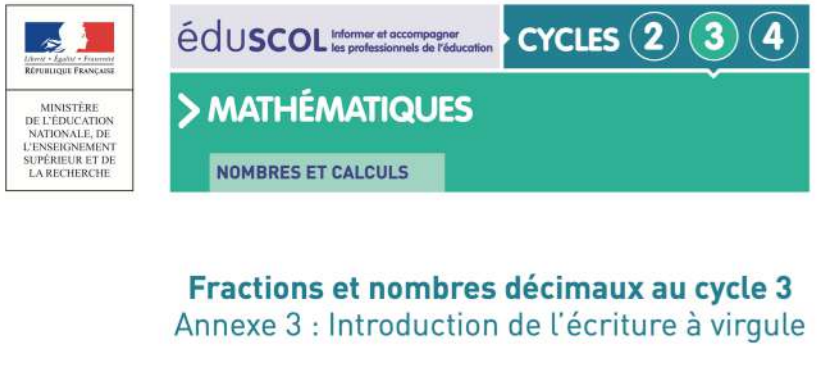
Attendus de fin de cycle
- Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux.
- Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux.
- Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul.

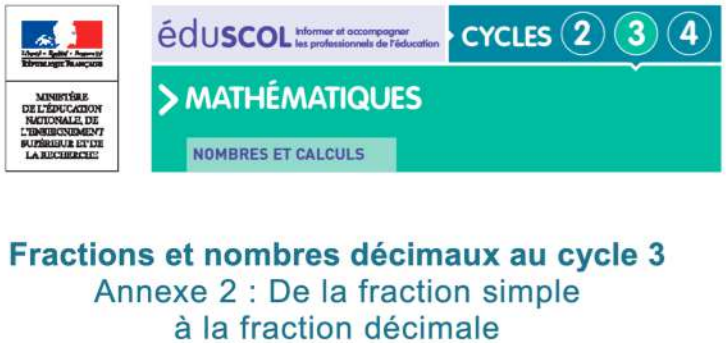
Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux
Connaître diverses désignations des fractions : orales, écrites et décompositions additives et multiplicatives (ex : quatre tiers ; 4/3 ; 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 ; 1 + 1/3 ; 4 x 1/3)
Connaître et utiliser quelques fractions simples comme opérateur de partage en faisant le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (ex : faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par 1/2).
Utiliser des fractions pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs. Repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée.
Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs. Comparer deux fractions de même dénominateur.
Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.
Connaître des égalités entre des fractions usuelles (exemples : 5/10 = 1/2 ; 10/100 = 1/10 ; 2/4 = 1/2) Utiliser des fractions pour exprimer un quotient.

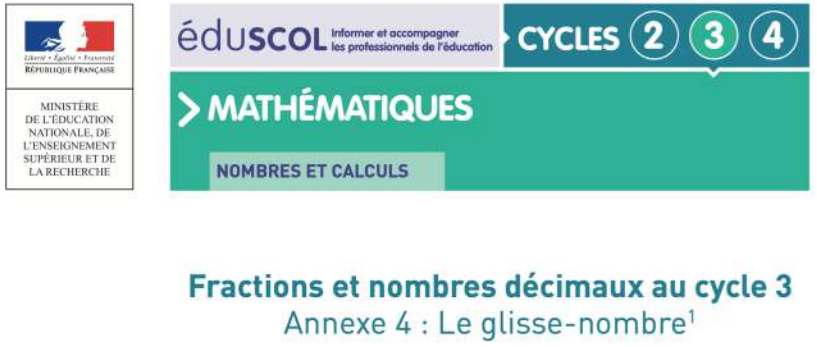
ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Ressources d'accompagnement



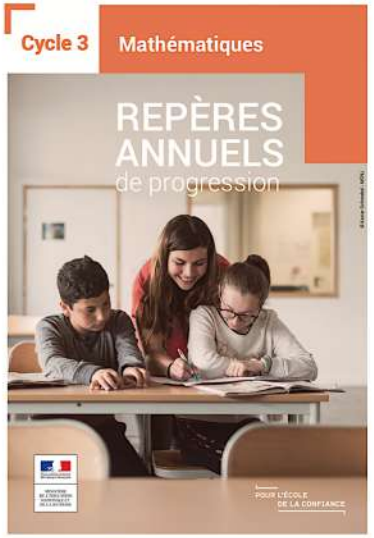






ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Repères annuels de progressions



ANNEXE 23 : MATHÉMATIQUES

REPÈRES ANNUELS DE PROGRESSION POUR LE CYCLE 3

NOMBRES ET CALCULS

Fractions

Dès la **période 1** les élèves utilisent d'abord les fractions simples (comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$) dans le cadre de partage de grandeurs. Ils travaillent des fractions inférieures et des fractions supérieures à 1. Dès la **période 2**, les fractions décimales sont régulièrement mobilisées : elles acquièrent le statut de nombre et sont positionnées sur une droite graduée. Les élèves comparent des fractions de même dénominateur. Ils ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. Ils apprennent à écrire des fractions décimales sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale inférieure à 1.	Dès la **période 1,** dans la continuité du CM1, les élèves étendent le registre des fractions qu'ils manipulent (en particulier $\frac{1}{1000}$) ; ils apprennent à écrire des fractions sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.	En **période 1**, sont réactivées les fractions comme opérateurs de partage vues en CM, puis les fractions décimales en relation avec les nombres décimaux (par exemple à partir de mesures de longueurs) ; les élèves ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. En **période 2** l'addition est étendue à des fractions de même dénominateur (inférieur ou égal à 5 et en privilégiant la vocalisation : deux cinquièmes plus un cinquième égale trois cinquièmes). En **période 3**, les élèves apprennent que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a (définition du quotient de a par b).

https://eduscol.education.fr/137/attendus-de-fin-d-annee-et-reperes-annuels-de-progression-du-cp-la-3e

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Repères annuels de progression

CM1

Dès la **période 1** les élèves utilisent d'abord les fractions simples (comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$) dans le cadre de partage de grandeurs. Ils travaillent des fractions inférieures et des fractions supérieures à 1.

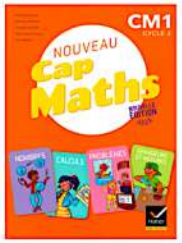
Dès la **période 2**, les fractions décimales sont régulièrement mobilisées : elles acquièrent le statut de nombre et sont positionnées sur une droite graduée. Les élèves comparent des fractions de même dénominateur. Ils ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. Ils apprennent à écrire des fractions décimales sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale inférieure à 1.

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

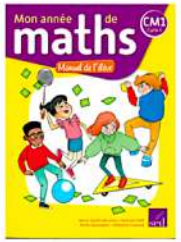
Introduction des fractions dans les manuels *conformes* au programme de 2016

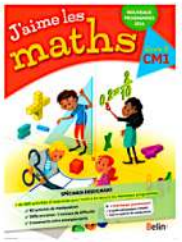
Introduction des fractions en classe de CM1

P1

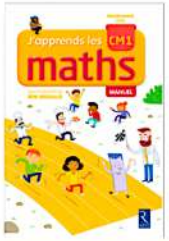


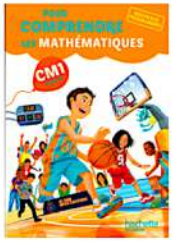
P2



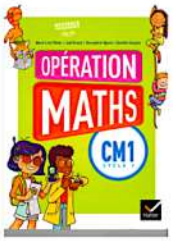


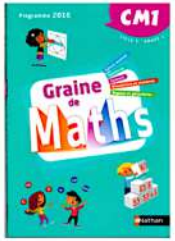
P3



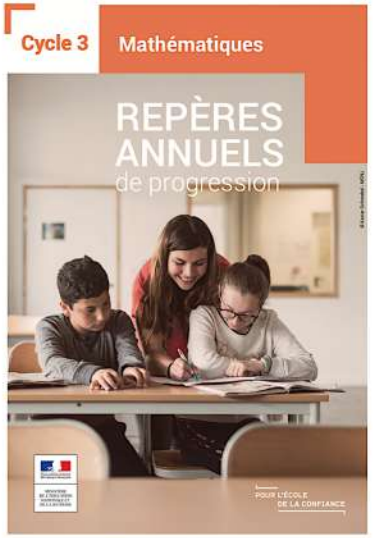


P4





ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité



Repères annuels de progressions

CM2

Dès la **période 1,** dans la continuité du CM1, les élèves étendent le registre des fractions qu'ils manipulent (en particulier $\frac{1}{1000}$) ; ils apprennent à écrire des fractions sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.

https://eduscol.education.fr/137/attendus-de-fin-d-annee-et-reperes-annuels-de-progression-du-cp-la-3e

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Repères annuels de progressions

6e

En **période 1**, sont réactivées les fractions comme opérateurs de partage vues en CM, puis les fractions décimales en relation avec les nombres décimaux (par exemple à partir de mesures de longueurs) ; les élèves ajoutent des fractions décimales de même dénominateur.

En **période 2** l'addition est étendue à des fractions de même dénominateur (inférieur ou égal à 5 et en privilégiant la vocalisation : deux cinquièmes plus un cinquième égale trois cinquièmes).

En **période 3**, les élèves apprennent que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a (définition du quotient de a par b).

ATTENDUS DE FIN D'ANNÉE DE CM1

NOMBRES ET CALCULS

• Ce que sait faire l'élève ♦ Type d'exercice ▪ Exemple d'énoncé *Indication générale*

Fractions

Ce que sait faire l'élève

- L'élève utilise les fractions simples (comme $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}$) dans le cadre de partage de grandeurs ou de mesures de grandeurs, et des fractions décimales ($\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$) ; il fait le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (par exemple faire le lien entre « la moitié de » et $\frac{1}{2}$ dans l'expression « une demi-heure »).
- L'élève manipule des fractions jusqu'à $\frac{1}{1000}$.
- L'élève donne progressivement aux fractions le statut de nombre.
- Il connaît diverses désignations des fractions : orales, écrites et des décompositions additives et multiplicatives (ex : quatre tiers ; $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; $1 + \frac{1}{3}$; $4 \times \frac{1}{3}$).
- Il les positionne sur une droite graduée.
- Il les encadre entre deux entiers consécutifs.
- Il écrit une fraction décimale sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.
- Il compare deux fractions de même dénominateur.
- Il ajoute des fractions décimales de même dénominateur.

ATTENDUS DE FIN D'ANNÉE DE CM1

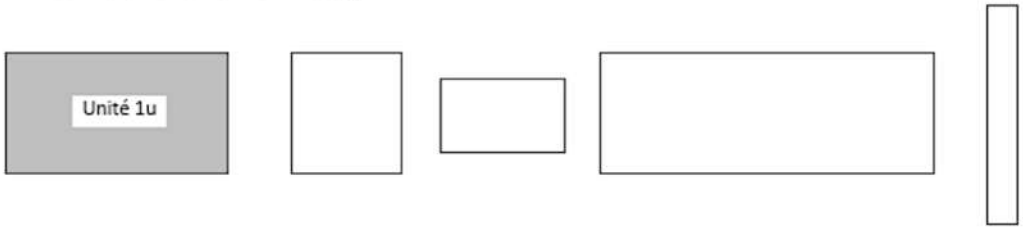
NOMBRES ET CALCULS

• Ce que sait faire l'élève ♦ Type d'exercice ▪ Exemple d'énoncé *Indication générale*

Exemples de réussite

♦ Il partage des figures ou des bandes de papier en $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$.

♦ Une unité d'aire étant donnée, il écrit sous forme de fraction des aires de surfaces données (supérieures ou inférieures à l'unité)



♦ Il écrit les nombres suivants sous forme de fractions décimales :
0,1 ; 0,01 ; 0,11 ; 1,2 ; 12,1 ; 34,54 ; 7,845…

▪ Quelle est la moitié de la moitié ? Quel est le double de la moitié ?

▪ Quel est le dixième d'une centaine ? Quel est le centième d'une dizaine ?

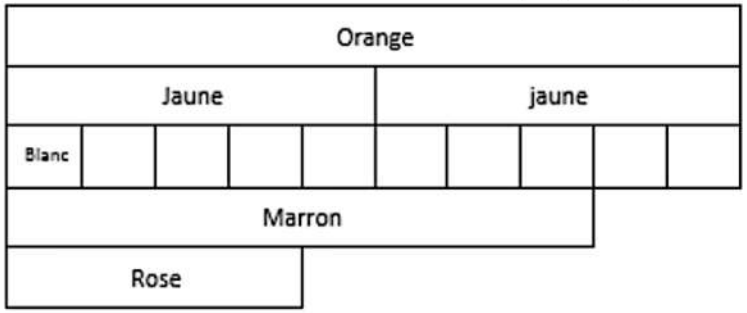
▪ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ peuvent-ils s'écrire sous forme de fractions décimales ?

ATTENDUS DE FIN D'ANNÉE DE CM1

NOMBRES ET CALCULS

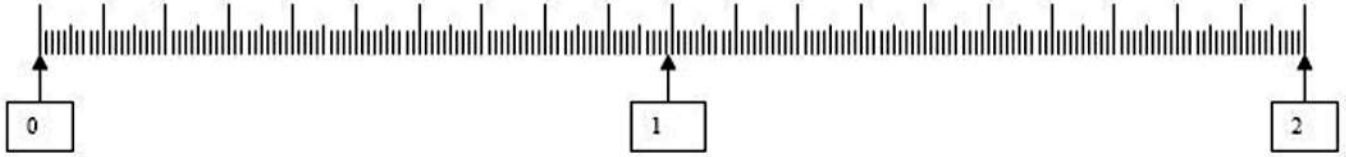
• Ce que sait faire l'élève ♦ Type d'exercice ▪ Exemple d'énoncé *Indication générale*

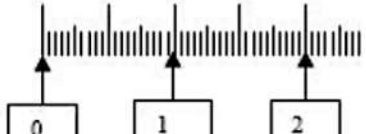
▪ La réglette orange vaut deux unités. Quelle est la longueur des réglettes jaunes, blanches, marron et roses. *(réglettes cuisenaire ou bandes de papier)*



La réglette marron vaut « une unité plus trois cinquièmes de l'unité » ou encore « huit cinquièmes de l'unité » ou « deux unités moins deux cinquièmes de l'unité ».

▪ Place $\frac{8}{5}$ puis $\frac{12}{10}$ sur les deux droites graduées ci-dessous :





ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

ATTENDUS DE FIN D'ANNÉE DE CM1

NOMBRES ET CALCULS

• Ce que sait faire l'élève ♦ Type d'exercice ▪ Exemple d'énoncé *Indication générale*

- Encadre $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{2}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{34}{10}$; $\frac{2}{100}$; $\frac{101}{2}$ entre deux entiers consécutifs.
- Trouve des fractions pouvant se situer entre 0 et 1 ; entre 4 et 5.
- Pour chaque fraction suivante : $\frac{27}{5}$, $\frac{33}{9}$, $\frac{52}{10}$, $\frac{37}{4}$, $\frac{175}{10}$,
  – indique le nombre d'unités du nombre décimal qu'elle représente ;
  – décompose-la en somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.
- Compare $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{3}$; $\frac{11}{12}$ et $\frac{13}{12}$.
- Calcule $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}$; $\frac{26}{100}+\frac{24}{100}$; $\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{6}{10}$.

https://eduscol.education.fr/137/attendus-de-fin-d-annee-et-reperes-annuels-de-progression-du-cp-la-3e

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Recommandation de l'IGEN

L'apprentissage des fractions doit commencer dès le début du cycle 3, en période 1 de la classe de CM1.

Faire cohabiter les différentes représentations des nombres (*entiers, fractions simples, fractions décimales et nombres décimaux*) est important. L'introduction d'une nouvelle représentation ne doit pas chasser les autres. Les élève doivent être régulièrement exposés aux correspondances entre différentes représentations ($\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$).

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Repères de progressivité

Les fractions sont à la fois **objet d'étude** et **support** pour l'introduction et l'apprentissage des **nombres décimaux.**

L'étude des fractions simples (*comme* $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}$) commence **dès le début de la classe de CM1.**

Sont ensuite abordée les fractions décimales.

Tout au long du cycle, différentes conceptions de la fraction sont abordées, du **partage** de grandeurs jusqu'au **quotient de deux nombres entiers, qui sera étudié en classe de 6e**.

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Repères de progressivité

Les fractions sont introduites le plus tôt possible pour palier à l'insuffisance des nombres entiers.

- Commencer l'apprentissage par les fractions unitaires : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, etc.

- Comparer les fractions unitaires : $\frac{1}{4}$ *avec* $\frac{1}{3}$

- Introduire les fractions non unitaires : $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{3}$, etc.

- Comparer les fractions non unitaires : $\frac{2}{3}$ avec $\frac{5}{4}$ mais pas $\frac{6}{9}$ avec $\frac{5}{8}$

- Introduire les fractions décimales : $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$

- Calculer sur les fractions : $\frac{5}{2} + \frac{3}{4}$, $\frac{3}{10} + \frac{4}{100}$

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Avant d'aborder les fractions…

Quelques notions à conforter :

- la notion de double, moitié, triple et quart ;
- diviser par 2 ou par 5 ;
- Maîtriser les relations entre 2, 5, 10, 20, 50, 100 (en lien avec la monnaie) entre 15, 30, 45, 60, 90 (en lien avec les durées).

Quand aborder les fractions ?

L'installation de connaissances basées sur ce que sont ces nouveaux nombres **demande du temps** : il faut donc **démarrer tôt.**

Les situations doivent être nombreuses et variées ce qui nécessite de programmer les premiers apprentissages sur les fractions très tôt dans l'année de CM1 (P1 ou P2).

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

SOMMAIRE

1. Quels sont les obstacles à la compréhension des fractions ?

2. Les nombres « non-entiers » et leur premières écritures

3. Additionner des fractions

4. Encadrer des fractions par des entiers

5. Les fractions décimales

1. Quels sont les obstacles à la compréhension des fractions ?

a) Les notations et leurs oralisations

La première difficulté est sans doute la notation fractionnaire qui se lit ***a b^{ième}*** et qui s'écrit $\frac{a}{b}$.

En effet, cette écriture ne se lit pas de gauche à droite, comme on en a l'habitude, mais de haut en bas…

Elle fait penser aux deux autres notations différentes :

$\frac{a}{b}$ qui se lit « a sur b » ; a / b qui se lit « a divisé par b » .

Remarque : Il est important d'être vigilant aux termes employés en disant ***a b^{ième}*** et non *a sur b*, ce qui aiderait les élèves à bien comprendre que ***b b^{ième}***, ça fait 1 (ce qui est essentiel et la définition même de la fraction).

1. Quels sont les obstacles à la compréhension des fractions ?

b) Numérateur et dénominateur

La proximité de ces deux mots induit souvent de la confusion chez les élèves. On pourrait se contenter de parler du « nombre du haut » et du « nombre du bas » jusqu'à ce que les élèves aient réellement compris ce que représente ***un*** $b^{ième}$.

Seul le 1, au sens de l'article indéfini (un) sera utilisé lors de l'apprentissage. On parlera alors de ***un*** $b^{ième}$.

On pense que si l'élève a vraiment compris ce qu'est ***un*** $b^{ième}$, alors la plupart des difficultés de calcul vont s'atténuer.

1. Quels sont les obstacles à la compréhension des fractions ?

c) Le nombre et son écriture

Il est fondamental que la fraction soit définie comme **l'écriture** (ce qui est le cas quand on parle de fraction irréductible ou de fractions équivalentes) ou **le nombre** (le rationnel dans le cas où le numérateur et le dénominateur sont entiers).

Les deux choix sont possibles mais on ne peut pas passer de l'un à l'autre (*ce que font pourtant beaucoup de manuels scolaires*).

Si le choix se porte sur *une fraction, c'est un nombre*, alors il faudra absolument employer le terme d'*écriture fractionnaire* pour le désigner.

Dans tous les cas, la fraction en mathématique, n'est jamais un *morceau* de quelque chose. Et c'est souvent le cas dans le langage courant…

1. Quels sont les obstacles à la compréhension des fractions ?

d) Le mot *fraction* dans le langage courant

Les sens du mot « fraction » en français créent des difficultés…

Dans le langage usuel, il a plusieurs sens différents, sans rapport avec le sens mathématique, ce qui engendre une difficulté pour comprendre ce qu'est une fraction mathématique :

- *une fraction de seconde = une toute petite grandeur* ;
- *une fraction irréductible = l'écriture et non le nombre*.

e) La « part » et le nombre qui la code

Un **quart** de tarte, c'est de la tarte (cela représente une part de tarte) alors que $\frac{1}{4}$ c'est un nombre qui code la part de tarte.

Les fractions sont des nombres, pas de objets physiques.

1. Quels sont les obstacles à la compréhension des fractions ?

f) Conclusion

1) Une histoire de marcassins

2) Le *camembert bien élevé*

Pour introduire les fractions, c'est pareil.

Il s'agit de juste faire comprendre aux élèves ce qu'est ***un*** *b-ième*, de faire des exercices sur $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, etc., et seulement ensuite, bien après, sur $\frac{3}{7}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{3}{10}$, etc.

et les difficultés généralement rencontrées seront levées !

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

SOMMAIRE

1. Quels sont les obstacles à la compréhension des fractions ?

2. Les nombres « non-entiers » et leur premières écritures

3. Additionner des fractions

4. Encadrer des fractions par des entiers

5. Les fractions décimales

2. Les nombres « non entiers » et leurs premières écritures

Il est préférable pour introduire un nouveau concept de proposer un problème qui en montre l'intérêt, voire même la nécessité.

C'est donc le cas pour les fractions et l'habitude veut que l'on commence par des partages.

2.1. L'activité de départ

Il est préférable de proposer, au début, des problèmes sur les longueurs que l'on pourra résoudre par pliage (en 2, et donc aussi en 4 et en 8) de bandes de papier pour montrer la nécessité de nombres non entiers.

L'activité classique (ERMEL CM1) consiste à faire mesurer des segments à l'aide d'une « bande-unité » donnée.
Les élèves disposent de la bande unité de 10 cm sur 2 cm et des feuilles n° 1 et n° 2 (**les règles graduées sont rangées**).

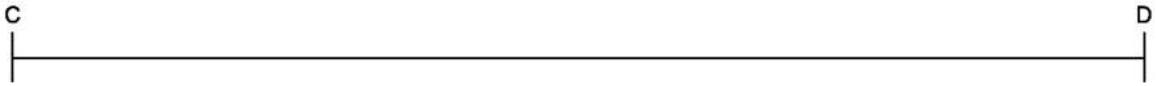
Tous les élèves ne reçoivent pas la même feuille n° 1.
Certaines contiennent [AB], d'autres [CD], d'autres [EF].

Prénoms :
Date :

Bande unité - Feuille 1

Prénoms :
Date :

Bande unité - Feuille 1



Prénoms :
Date :

Bande unité - Feuille 1

La feuille n° 3 est montrée aux élèves. Il est précisé aux élèves que sur cette feuille se trouve un segment de la même longueur que celui qui figure sur la feuille n° 1 de chacun.

Bande unité – feuille 3

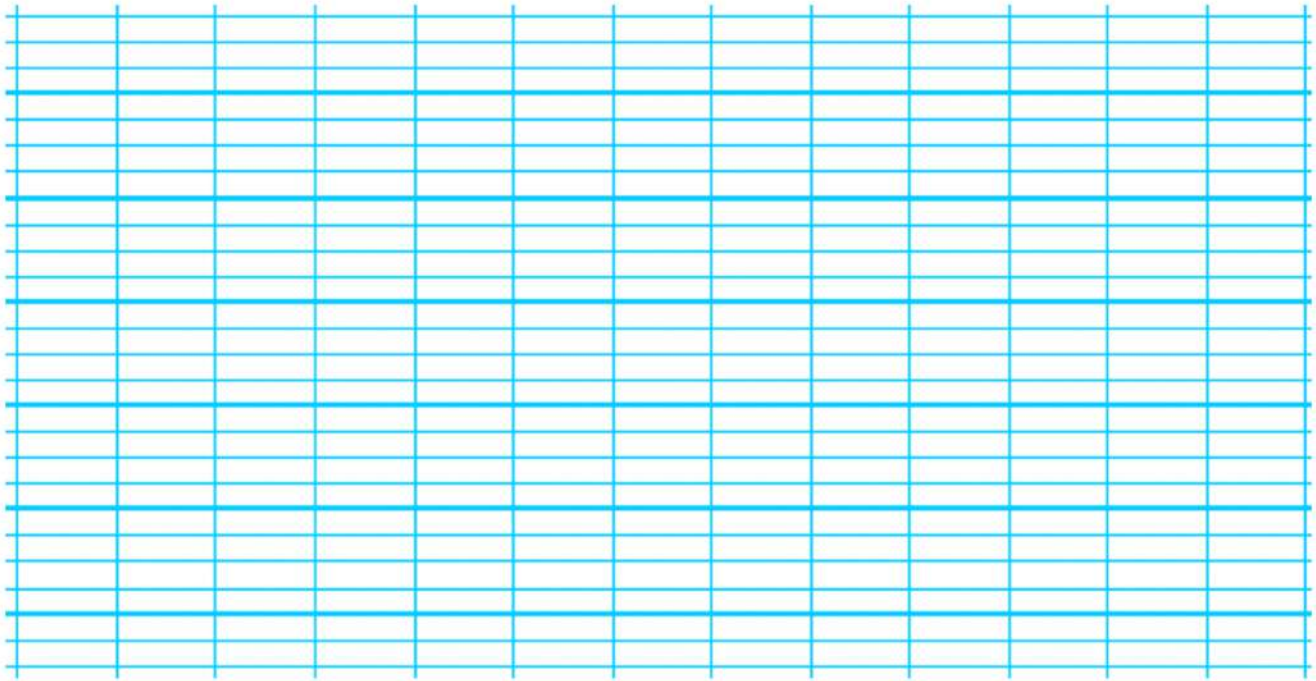
Les élèves sont invités à écrire sur la feuille n°2 un message qui permettra à ceux qui le recevront de trouver sur la feuille n°3 le segment qui a même longueur que celui qui se trouve sur leur feuille n°1.
Les règles graduées ne sont pas autorisées.
Seule la bande de papier, appelée bande unité, peut être utilisée.

Prénoms des émetteurs : _____

Bande unité
Feuille 2

Écrivez un message permettant de retrouver votre segment.

Attention, il ne faut surtout pas le nommer.



Les mesures des segments qui doivent être mesurés à l'aide de la bande unité sont d'abord des entiers, dont 2 et 3. Puis $2 + \frac{1}{2}$, $1 + \frac{3}{4}$ et $3 + \frac{1}{2}$.

Ainsi, jusque là, les expressions orales *deux*, *trois* , *deux et demi* , *un et demi* , *trois et demi* pourraient suffire.

On donne ensuite des segments de longueur de mesure $2 + \frac{1}{4}$, $1 + \frac{1}{2}$,…

Là, ça ne suffira plus car il y aurait deux *deux et demi* différents et aussi deux *un et demi.*

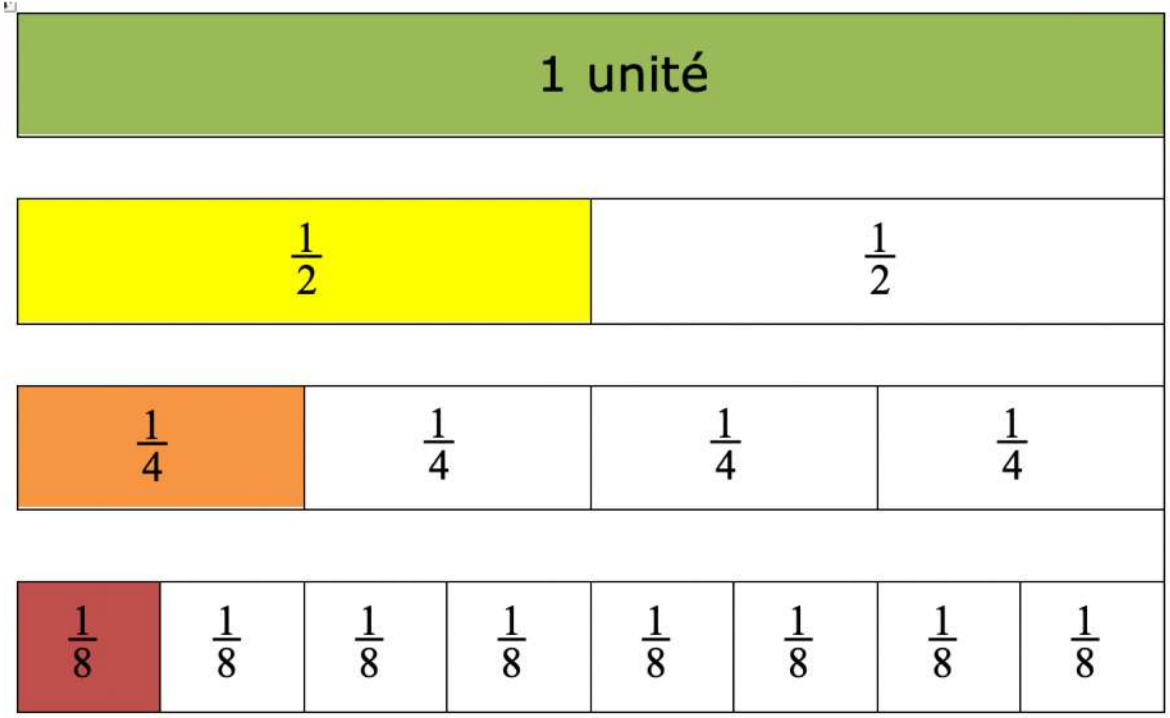
Pour distinguer les longueurs $2 + \frac{1}{4}$ et $2 + \frac{1}{2}$, l'idée de plier en deux la bande-unité pourrait venir à certains élèves qui constateront que *ça tombe pile* pour certains des segments *à problème* (ceux de mesure demi-entière), mais pas pour les autres.

Alors, en pliant encore une fois en deux, ça marche également pour les autres. Il est donc très important de ne pas leur proposer n'importe quelle mesure.

2.2. Deuxième temps : vers la définition

Un retour sur les écritures proposées par les élèves qui avaient écrit $2 + \frac{1}{2}$ et $3 + \frac{1}{4}$ permet de faire émerger qu'il faut deux fois $\frac{1}{2}$ pour obtenir 1 et quatre fois $\frac{1}{4}$ pour obtenir 1 en leur demandant ce que représentent le 2 et le 4 dans $\frac{1}{2}$ et dans $\frac{1}{4}$.

L'important est de faire le lien entre le « 4 » qui est écrit en bas de $\frac{1}{4}$ et le fait qu'il y a quatre parties dans la bande unité *1*, ce qui se voit très bien quand on déplie la bande unité qu'on avait pliée en 4 (en 2 puis encore en 2).
Il faut cependant éviter toute référence explicite à « couper en 2 », « diviser par 4 », etc.
En effet, couper trois fois donne des huitièmes et non des tiers…



$\frac{1}{2}$ → Il en faut 2 pour faire 1.

$\frac{1}{4}$ → Il en faut 4 pour faire 1.

$\frac{1}{8}$ → Il en faut 8 pour faire 1.

2. Les nombres « non entiers » et leurs premières écritures

2.3. La définition de *un énième* : c'est la seule chose que les élèves doivent absolument savoir.

On va délibérément oublier qu'on a pu parler de trois quarts, de cinq huitièmes, etc. et désormais, pendant **plusieurs semaines**, seules des fractions unitaires $\frac{1}{n}$ seront utilisées et manipulées.

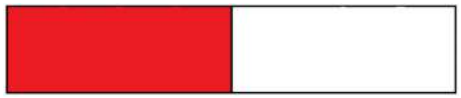
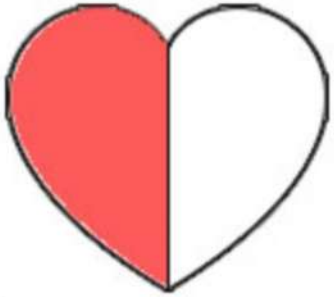
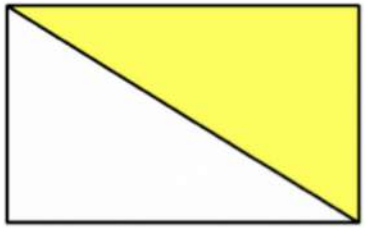
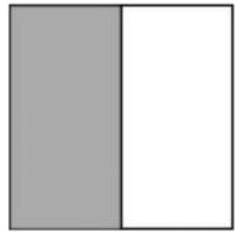
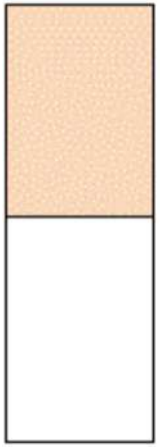
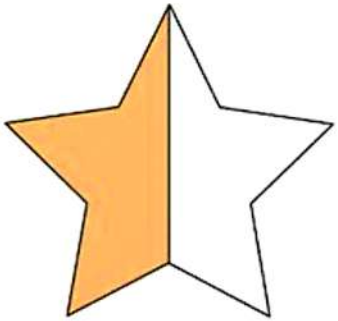
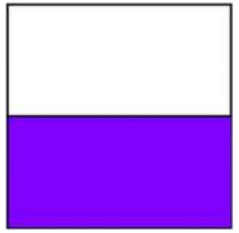
La définition donnée comme celle à savoir, sous la forme d'un slogan, sera :

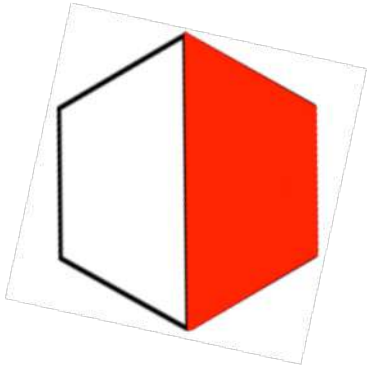
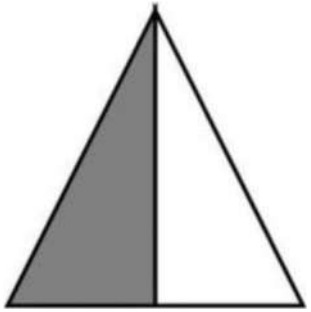
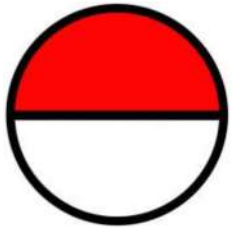
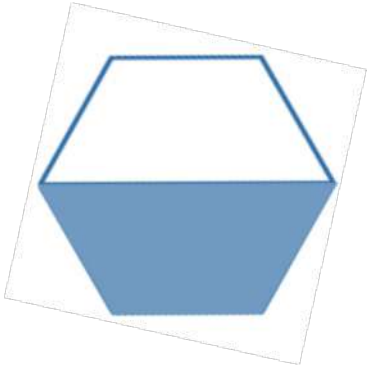
« ***un cinquième, c'est quand il en faut 5 pour faire 1*** » ;
« ***un sixième, c'est quand il en faut 6 pour faire 1*** » ;
« ***un huitième, c'est quand il en faut 8 pour faire 1*** », etc.

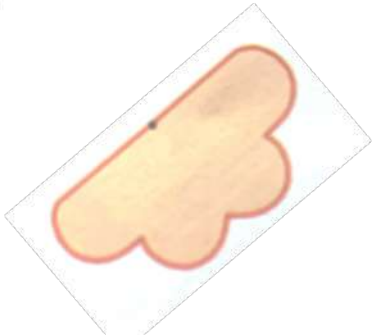
Et on donnera systématiquement des illustrations simples et « visibles », d'abord sur les longueurs, puis sur des aires, des angles, etc.

Sans avoir peur de répéter et faire répéter sans cesse que
« *C'est un* $n^{ième}$ *car il en faut faut* ***n*** *pour faire 1* ».

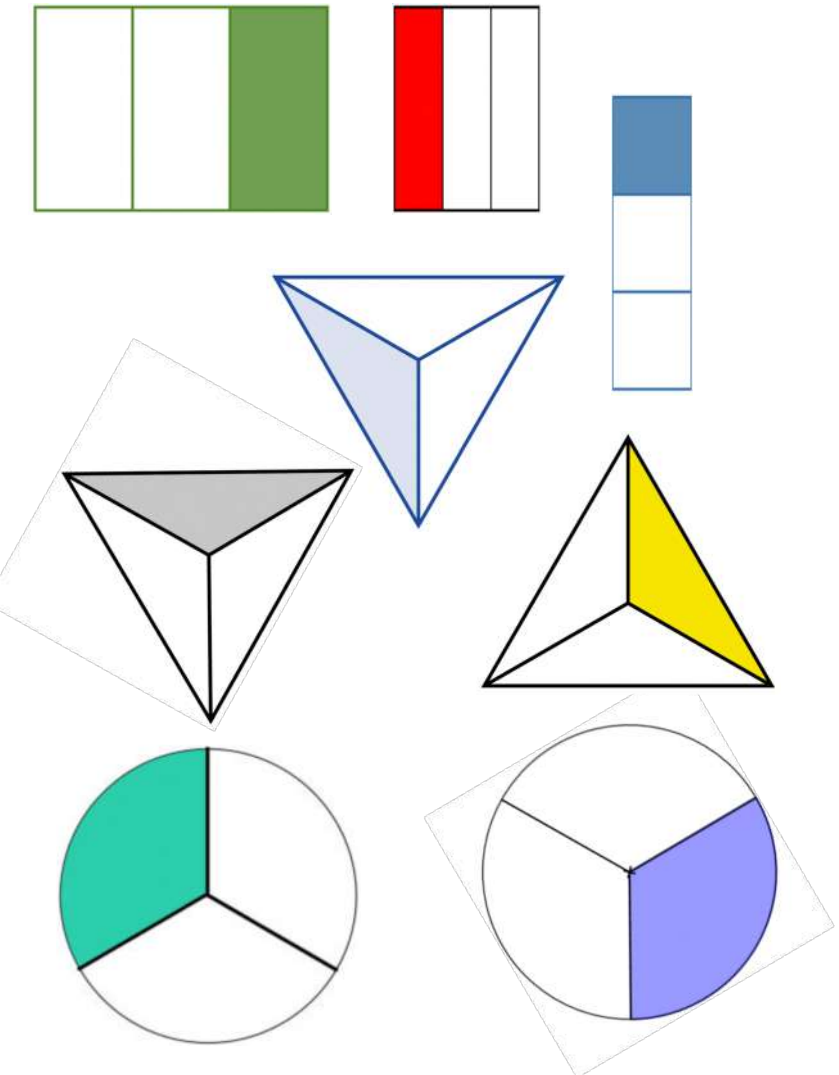
Diverses représentation pour $\frac{1}{2}$

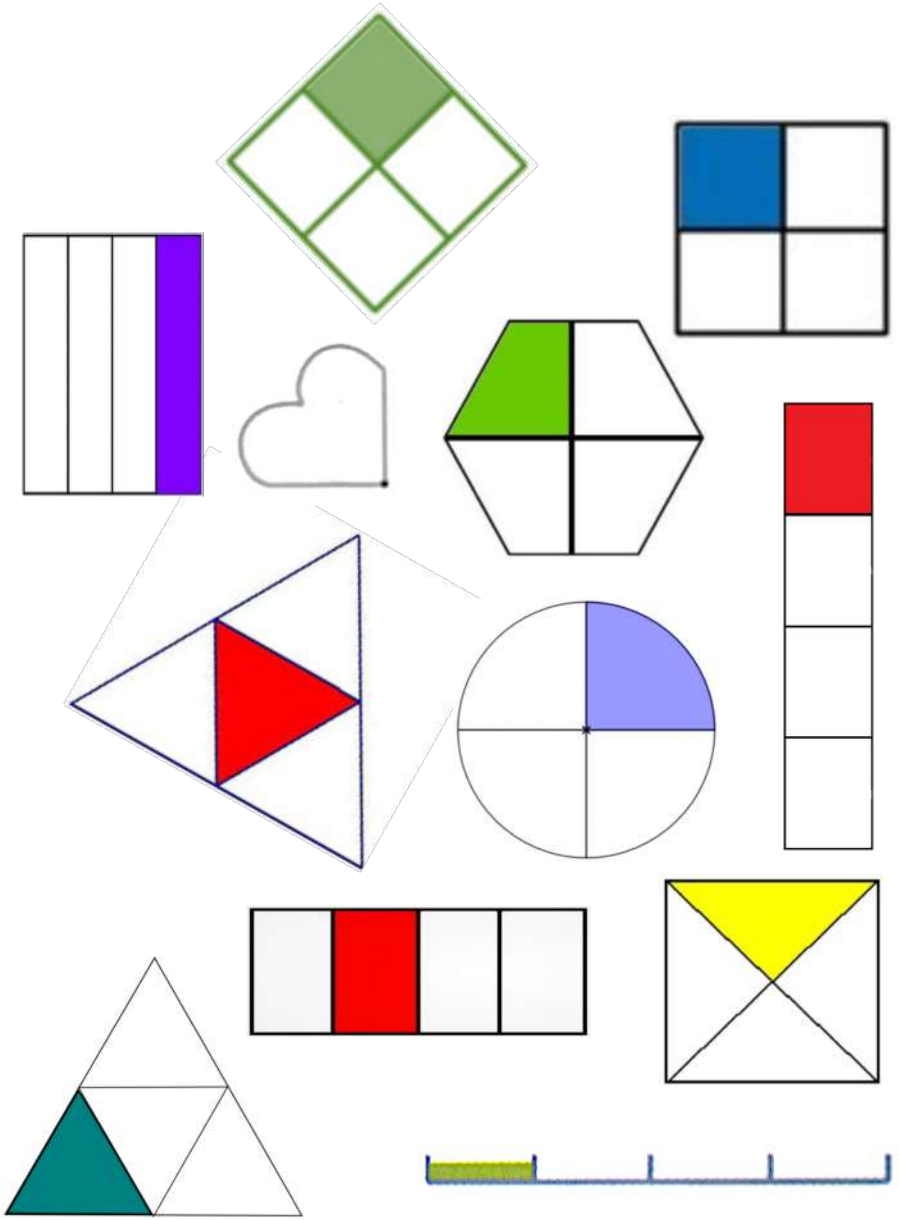







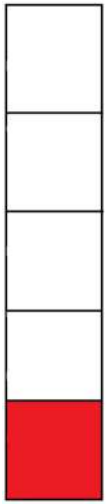
Diverses représentation pour $\frac{1}{3}$

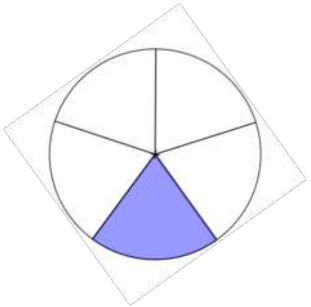


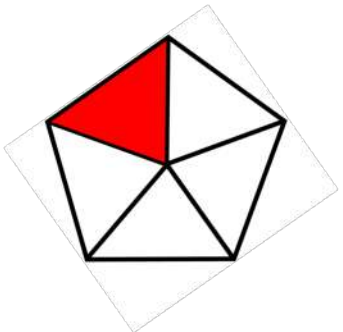
Diverses représentation pour $\frac{1}{4}$



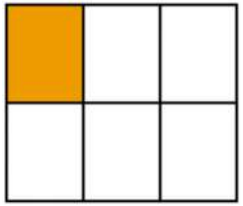
$\frac{1}{5}$

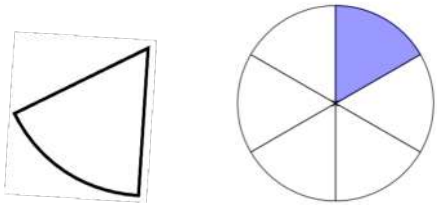


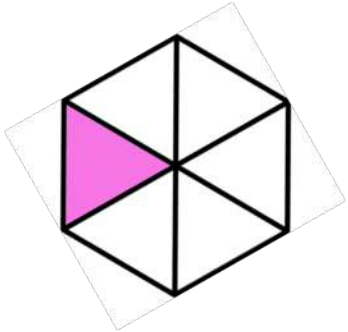




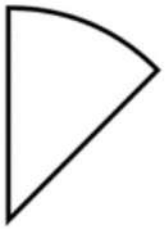
$\frac{1}{6}$

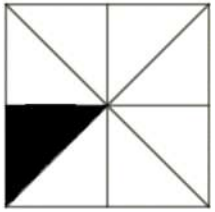


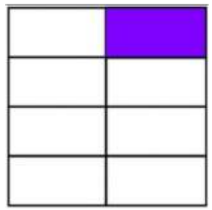


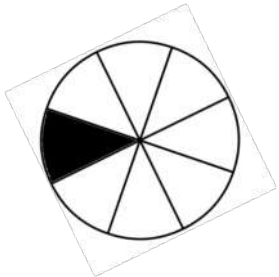


$\frac{1}{8}$







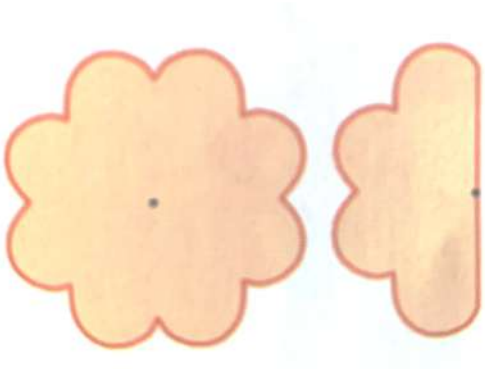


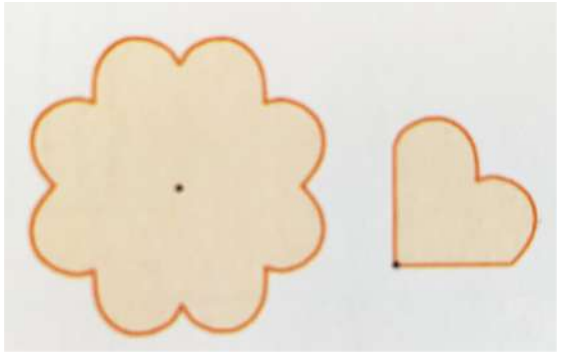
2.4. Quelques recommandations…

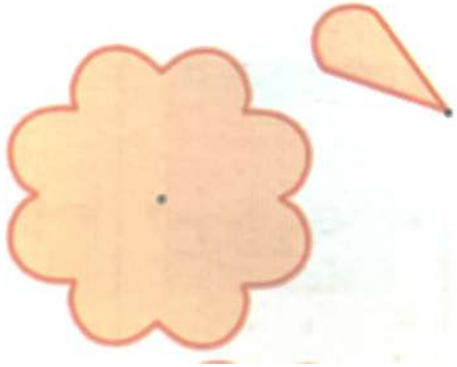
Faire découper des gâteaux en un nombre de parts donné n'est pas recommandé. En effet, toute l'attention des élèves serait mobilisée sur la difficulté à obtenir des parts qui doivent toutes être égales.

En revanche, il est possible de les leur faire manipuler ou dessiner pour qu'il trouve combien sont nécessaires pour obtenir 1 gâteau.

Il sera conclu qu'il s'agit d'un **n^{ième}** de gâteau puisqu'il en faut **n** pour faire 1 (le gâteau entier).

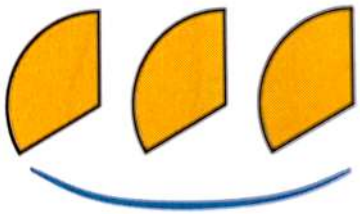




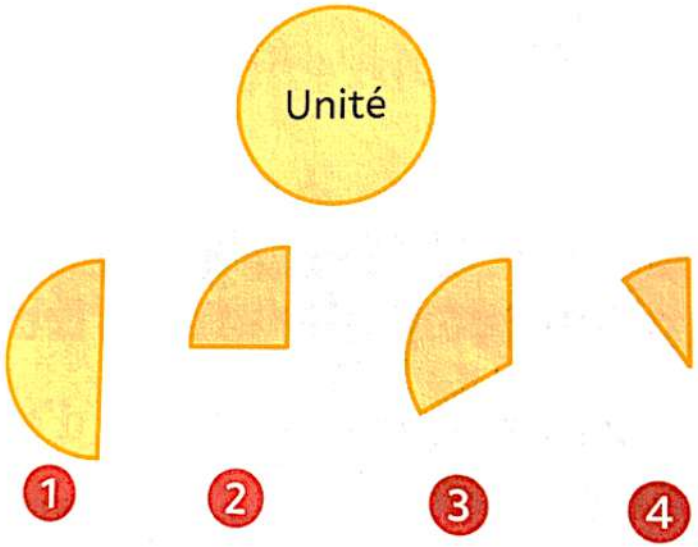


2. Les nombres « non entiers » et leurs premières écritures

2.4. Quelques recommandations…

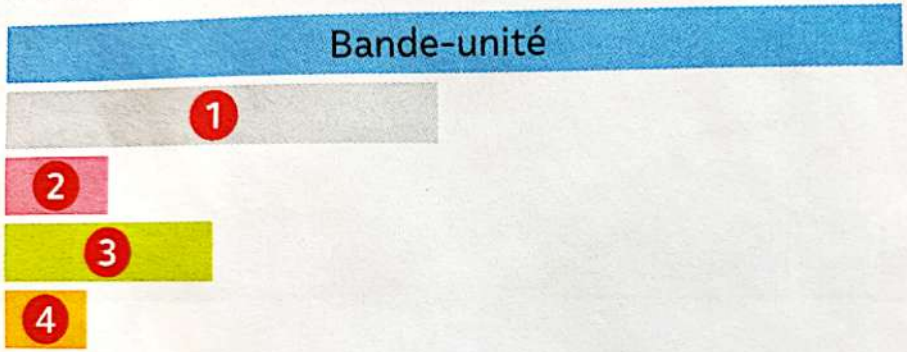


1

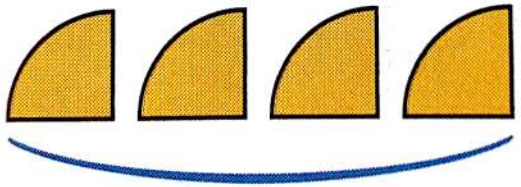


a. un quart d'unité
b. une demi unité
c. un tiers d'unité
d. un dixième d'unité

2 Associe chaque représentation à son nom (un numéro/une lettre).



a. un quart de bande-unité
b. une demi bande-unité
c. un dixième de bande-unité
d. un huitième de bande-unité



1

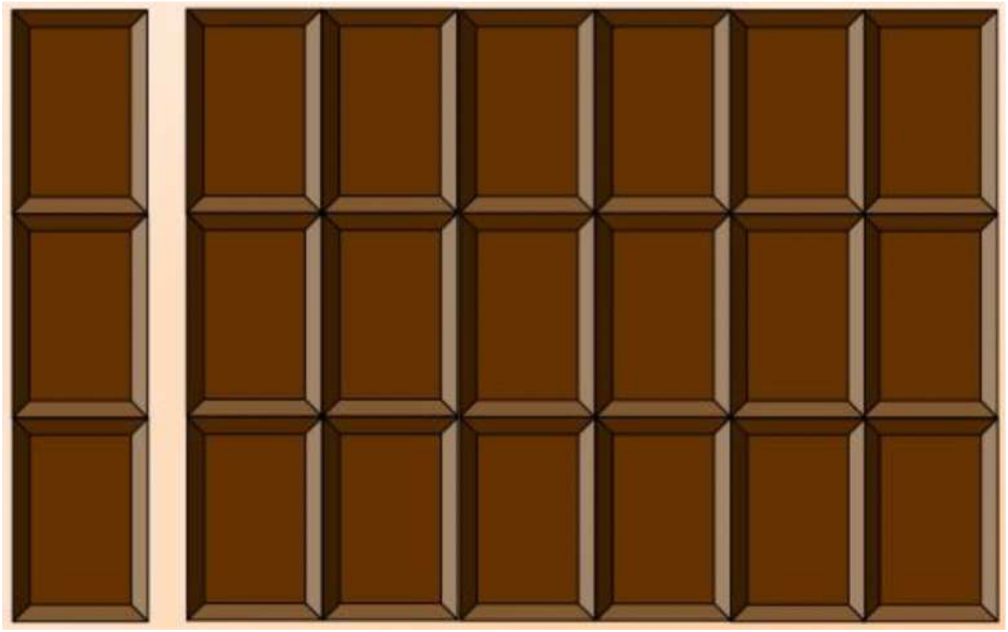
2.4. Quelques recommandations…

Un peu plus tard, les élèves pourront être confrontés aux tablettes de chocolat. Il faudra cependant veiller à ne donner que des cas qui aboutissent à une fraction unitaire et surtout pas à des fractions de numérateurs différents de 1.

Par exemple, pour une tablette de 3 carrés sur 7 dont on cassera une bande de 3 carrés.

En reportant 7 fois cette bande de 3 carrés, on retrouve la tablette entière.

La barre de trois carrés représente donc un septième de la tablette.



2. Les nombres « non entiers » et leurs premières écritures

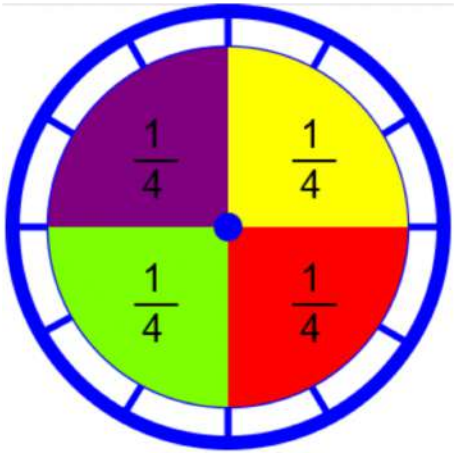
2.5. Et avec d'autres grandeurs…

► Les masses marquées ½ kg

À la question *Pourquoi ½ kg ?*, la réponse peut être que *c'est parce qu'on en met **deux** dans un plateau de la balance pour faite exactement **1** (kg)*.
On ne se risque pas à couper le kg en deux parties égales pour obtenir des demi-kilogrammes…

► Le quart d'heure

À la question *Qu'est-ce qu'un quart d'heure ?*,
la réponse peut être que *si on enchaîne quatre quart d'heure de suite, ça donne une heure*.



Et à la question *Pourquoi un quart d'heure c'est quinze minutes ?*, la réponse peut être que *un quart d'heure, ça fait quinze minutes car 4 x 15 min = 60 min cad 1h. Donc 15 minutes c'est un quart d'heure*.

2.6. Comparer des fractions unitaires

À la question « *Quel nombre est le plus grand ?* $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{8}$? », il n'est pas rare d'obtenir pour réponse que c'est $\frac{1}{8}$ … 8 étant plus grand que 5.

La *définition-slogan,* si souvent répétée, permet cette fois encore de lever la difficulté :

un cinquième, il en faut cinq pour faire 1 ;
un huitième, il en faut huit pour faire 1.
S'il en faut plus, c'est qu'il est plus petit !

Ce raisonnement est à expliciter et à institutionnaliser très tôt !

2.7. Et enfin les fractions « habituelles »

Après le temps suffisant (3 semaines au minimum) passé à manipuler des fractions unitaires et une fois la notion ***un $n^{ième}$, il en faut n pour faire 1*** acquise.

Désormais, quand les élèves rencontreront des écritures fractionnaires comme $\frac{3}{8}$ ou $\frac{5}{3}$, ils seront invités à se demander :

« C'est quoi $\frac{3}{8}$?
- Ce sont des huitièmes.
- Et combien ?
- 3. »

« C'est quoi $\frac{5}{3}$?
- Ce sont des tiers.
- Et c'est quoi des tiers au fait ?
- C'est quand il en faut trois pour faire 1.
- Et ici, il y en a combien ?
- 5. »

L'essentiel à savoir, c'est que $\frac{a}{b}$ ce sont des $b^{ièmes}$.

2.8. Disparition de la plupart des difficultés…

2.8.1. C'est le cas avec les fractions plus grandes que 1…

Une fois compris ce que représente une fraction, il est évident que $\frac{5}{3} > 1$.

Puisque $\frac{5}{3}$ ce sont **des** tiers ; qu'**un** tiers, c'est quand il en faut trois pour faire 1 ; qu'ici on en a 5, et donc plus que 3 ; alors $\frac{5}{3} > 1$.

Il n'est plus nécessaire de penser *numérateur et dénominateur* ni *en haut* et *en bas* !

Il est alors inutile de faire apprendre par cœur le théorème « *Une fraction est plus grande que 1 si, et seulement si, son numérateur est plus grand que son dénominateur.* »

2.8. Disparition de la plupart des difficultés…

2.8.2. C'est pareil avec les fractions inférieures à 1

C'est le même raisonnement pour démontrer que $\frac{3}{5} < 1$.

Puisque $\frac{3}{5}$ ce sont **des** cinquièmes ; qu'**il** il en faut cinq pour faire 1 alors que là, il n'y en a que 3, et donc moins que 5 ; alors $\frac{3}{5} < 1$.

2.8.3. Idem pour les fractions égales à 1

Quand le slogan *un septième, il en faut sept pour faire 1* a été répété de multiples fois, on sait bien que sept septièmes = 1.

Nul besoin d'apprendre la formule *magique* $\frac{7}{7} = 1$ (*Quand le numérateur est égal au dénominateur alors la fraction est égale à 1.*).

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

SOMMAIRE

1. Quels sont les obstacles à la compréhension des fractions ?

2. Les nombres « non-entiers » et leur premières écritures

3. Additionner des fractions

4. Encadrer des fractions par des entiers

5. Les fractions décimales

3. Sommes de fractions

Pas de difficulté non plus pour la somme de fractions qui ont le même dénominateur.

En effet, tous les élèves savent que 3 fleurs + 7 fleurs, ça fait (3 + 7) fleurs ;

Et donc tous savent que 3 huitièmes + 7 huitièmes , ça fait (3 + 7) huitièmes !

Ça ne fonctionne pas plus avec des fractions de dénominateurs différents qu'avec des voitures et des camions…
3 voitures + 7 camions, ça ne fait pas 10 « *voitures-camions* » !

Et donc à l'école, on gardera l'écriture comme ça :
3 huitièmes + sept onzièmes, ça fait 3 huitièmes + sept onzièmes.
On ne peut pas l'écrire autrement !

Bien sûr, on sait aussi que 3 voitures + sept camions, ça fait 10 véhicules.
C'est bien la clé de l'addition des fractions : trouver un dénominateur commun… mais ça relève du collège !

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

SOMMAIRE

1. Quels sont les obstacles à la compréhension des fractions ?

2. Les nombres « non-entiers » et leur premières écritures

3. Additionner des fractions

4. Encadrer des fractions par des entiers

5. Les fractions décimales

4. Encadrement des fractions par des entiers

La difficulté pour encadrer $\frac{13}{5}$ entre deux nombres entiers vient souvent du fait que les élèves cherchent à diviser 13 par cinq, et aussi surement essayer de découper mentalement en cinq parts.

Alors qu'avec la définition par le slogan et en s'appuyant sur le répertoire multiplicatif qui doit évidemment être connu, on n'utilise que la multiplication.

Il n'est pas très difficile de voir que $2 < \frac{13}{5} < 3$, une fois qu'on sait additionner les fractions et écrire une fraction comme la somme de sa partie entière et de sa « partie fractionnaire ».

$$\frac{13}{5} = \frac{5}{5} + \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = 1 + 1 + \frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5}$$

Il est nécessaire que le calcul mental avec les entiers soit vraiment maîtrisé…

ACADÉMIE
DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

SOMMAIRE

1. Quels sont les obstacles à la compréhension des fractions ?

2. Les nombres « non-entiers » et leur premières écritures

3. Additionner des fractions

4. Encadrer des fractions par des entiers

5. Les fractions décimales

5. Les fractions décimales

Les fractions n'ont pour but, à l'école élémentaire, que de pouvoir définir clairement les nombres décimaux, par le biais d'égalités du type :

$$7{,}45 = 7 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}$$

L'intérêt des nombres décimaux, c'est qu'il est facile de calculer avec.
Il faut pour cela être capable d'additionner des dixièmes avec des centièmes.

Les fractions décimales sont des fractions comme les autres.

Leur seule particularité est que l'on maîtrise le rapport entre un dixième et un centième.

Les élèves auront compris, à force de répéter le *slogan,* que *1 c'est 10 dixièmes* mais aussi que *1 c'est 100 centièmes.*

Seule l'égalité *un dixième c'est 10 centièmes devra alors être apprise.*

Pour le prouver, on repose toujours la même question :

« Qu'est-ce qu'un dixième ? *C'est quand il en faut…*

Et un centième ? *C'est quand il en faut…*

Et alors, un dixième, c'est plus ou moins qu'un centième ? *Puisqu'il en faut…*

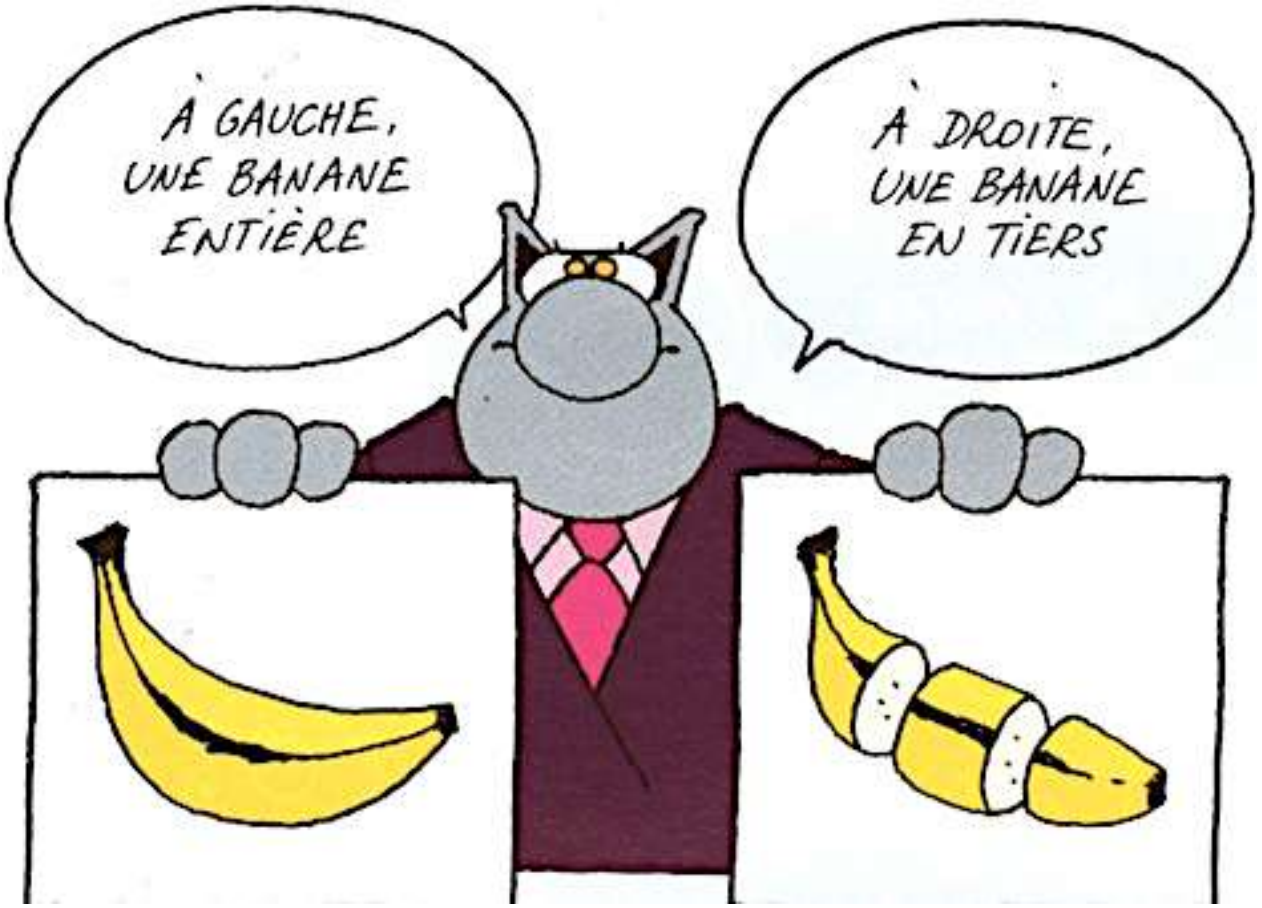
Et combien de fois plus ?

Dix fois puisque 100, c'est dix fois dix.
Il faut donc 10 fois plus de centièmes que de dixièmes pour faire 1.
Et donc un dixième, c'est dix fois un centième. »

Il ne reste alors plus qu'à s'exercer avec des égalités du type $\frac{40}{100} = \frac{4}{10}$.

C'est la seule nouveauté des fractions décimales, on va pouvoir les additionner, même dans les cas où on ne pouvait pas le faire jusque là, avec les fractions simples.

$\frac{4}{10} + \frac{5}{100}$ = 4 x 10 centièmes + 5 centièmes = 40 + 5 centièmes = $\frac{45}{100}$

Et c'est la seule chose dont on a besoin pour les nombres décimaux.

Merci pour attention et votre participation.