

Nombre, numération, calcul

cycle 2

IUFM Midi-Pyrénées

PLAN

- Des recherches récentes
- Des évaluations
- Des situations de référence sur le nombre
- Le calcul
- Des situations de réinvestissement

Recherches anglo-saxones en psychologie cognitive sur les premiers nombres

- Les 5 principes du comptage de Gallistel et Gelman (1978)
- Le comptage-numérotage nuit à la compréhension du nombre quantité totale de K. Fuson (1988)
- La compréhension des propriétés linguistiques des mots-nombres vient avant la compréhension de sa signification quantitative : Bloom et Wynn (1997).
- La supériorité du système de numération oral asiatique
- La détermination de procédures plus spontanées et de problèmes plus accessibles dans un contexte social donné

Des enfants de rue en Amérique du Sud

- Léa a 47 billes, elle perd 3 billes : ***réussite 56%***
- Léa a 47 billes, elle perd 44 billes : ***réussite 15%***
- Eric a 44 billes. Il en gagne. Ensuite, il en a 47.
Combien en a-t-il gagné ? ***Réussite 54 %***
- Eric a 3 billes. Il en a gagné. Ensuite, il en a 47.
Combien en a-t-il gagné ? ***Réussite 10 %***
- Il faut que j'achète 18 sacs de ciments à 12 pesos.
Combien vais-je payer ?

$$12 + 12 = 24 ; 24 + 24 = 48 ; 48 + 48 = 96 ; 96 + 96 = 192$$
$$192 + 24 = 216 \text{ (additions posées)}$$

Quelques travaux français

- Brissiaud dans "Comment les enfants apprennent à calculer " : on ne doit pas s'appuyer que sur le comptage mais aussi sur les collections de références et sur la décomposition/recomposition
- Stella Baruk dans "Comptes pour petits et grands " propose un apprentissage du nombre et de la numération fondée sur la langue et sur le sens :
" Il s'agit d'organiser le "nombreux", **la langue l'a déjà fait.** "

Une évaluation sur les
connaissances numériques
en fin de GS ou en début de CP

Un repérage de compétences en numération proposé dans le cadre d'une recherche INRP

1. – ARTICULATION ECRITURE CHIFFREE-CARDINAL

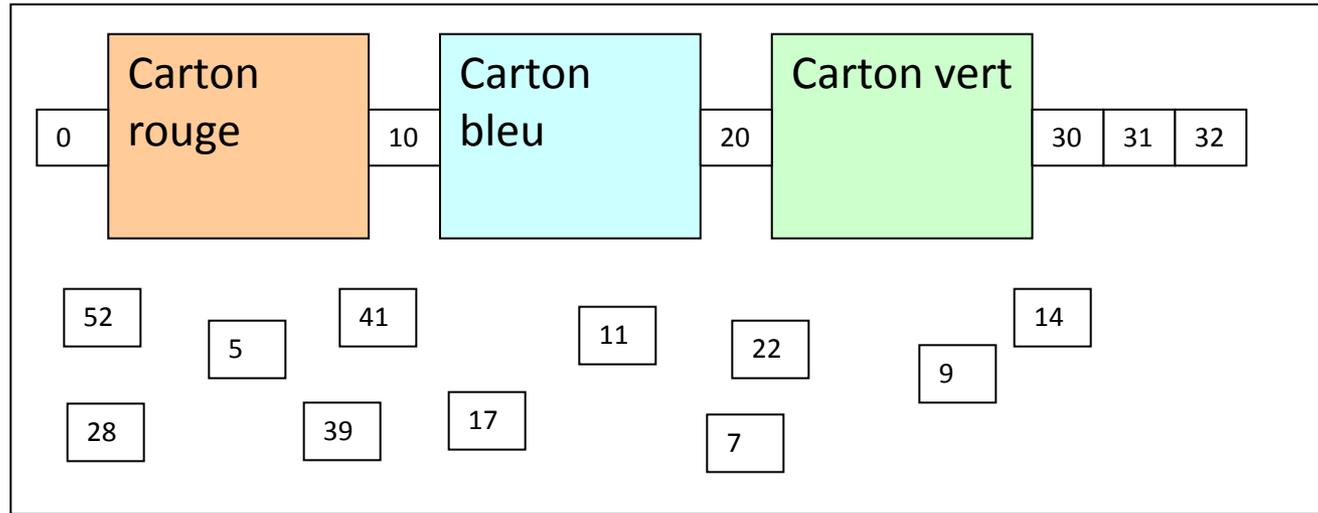
Matériel : des barres de 10 cubes emboîtables et des cubes emboîtables isolés, un carton marqué 37.

- Consigne ; expliquer à l'enfant que les barres sont constituées de 10 cubes. « Donne-moi le nombre de cubes qui est écrit sur le carton. »
- Consigne ; on donne à l'enfant 5 barres et 4 cubes et on lui demande : « Peux-tu me dire combien il y a de cubes ? » Lui faire écrire le nombre énoncé.

Noter les différents procédés de dénombrement

2. – ARTICULATION ECRITURE CHIFFREE –ORDINAL

Matériel : une feuille par enfant.



Consigne : « Sur la feuille on a dessiné une bande-nombres. Dessous on a dessiné des cartons avec des nombres.

Une partie de la bande est cachée par un cache bleu :

- entoure en bleu les cartons qui pourraient se mettre sous le cache bleu

Une partie de la bande est cachée par un cache rouge :

- entoure en rouge les cartons qui pourraient se mettre sous le cache rouge

Une partie de la bande est cachée par un cache vert :

- entoure en vert les cartons qui pourraient se mettre sous le cache vert. »

3.- ARTICULATION CARDINAL-ORDINAL

Matériel : une bande d'une soixantaine de cases sur laquelle les cases 1, 2, 3 sont marqués ainsi que les multiples de dix ; des cubes emboîtables en vrac et des barres de dix cubes emboîtables.

- Consigne : On donne à l'enfant 23 cubes en vrac, sans lui dire combien il y en a. « Voilà des cubes. Si je veux mettre un cube dans chaque case en commençant là (case 1), peux-tu me dire où serait le dernier cube. » Insister sur l'aspect prévision.
- Même consigne avec 4 barres et 6 cubes.

Noter les procédures de dénombrement, les points de repère pris sur la bande, les points de repère de la comptine orale (10, 20, 30, ...).

Evaluations CE1 2010

- Ecriture de nombres dictés : 830, 86, 700, 107, 292, 660
- Ecriture en lettres de : 663, 172, 109.
- Ranger les nombres du plus petit au plus grand : 124 – 39 – 506 – 252 – 710 – 458

Pistes de travail : différents types de compétences logiques sont à construire sur l'ordre, l'intercalation, l'encadrement, la sériation et le rangement ; elles sont aussi utilisées avec les grandeurs (longueur, masse, durée) mais aussi sur la chronologie.

Calcul mental : $7+7$, $9+6$, $8+9$, $6+5$, 8×2 , 6×5 , 4×3 , 9×3

Puis $12+13$, $23+9$, $13+5+4$, $140+30$, $24-10$, $45-15$, $34-9$, $321-100$

En 2006, ces compétences étaient notés en cours d'acquisition

5×3 , 5×5 , 5×2 (40% de réussite), 5×8 , 5×10 , 5×7 (23% de réussite),

10×2 , 10×5 , 10×10 (53% de réussite)

$50-20$, $40-8$, $45-9$, 3×20 , 2×400 (réussite : 49%, 44%, 40%, 51%, 55%)

$?+13=20$, $?+91=100$, $?+75=80$, $?+999=1000$ (réussite : 38%, 43%, 47%, 48%)

Piste de travail : *UNE PROGRESSION DE CALCUL MENTAL QUOTIDIEN, AVEC DES PRATIQUES VARIEES (COMMENT ETUDIER LES TABLES ? QUELS JEUX ? ...), DES METHODES DE CALCUL REFLECHI INSTITUTIONNALISEES (décomposition en passant par la dizaine immédiatement inférieure, savoir ajouter ou enlever 9 , savoir ajouter ou enlever 10, 100, savoir ajouter des nombres entiers de dizaines ...), les DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT DES PROGRAMMES 2002 sur le calcul mental et le calcul mémorisé.*

Calcul posé : $548 + 265, 786 - 145, 362 - 126$

Dans les commentaires, la méconnaissance de la technique opératoire de la soustraction n'est pas envisagée (alors que celle de l'addition l'est). Quelle est la technique opératoire de la soustraction envisagée ?

Etudions $362 - 126$:

$$\begin{array}{r} \underline{362} \\ 126 \\ + 236 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 362 \\ - \underline{126} \\ 236 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3\overset{5}{\cancel{6}}2 \\ - \underline{126} \\ 236 \end{array}$$

Commentaires de l'évaluation 2006 : « ... une part essentielle de l'activité doit résider dans la recherche de la compréhension et de la justification des techniques utilisées, ce qui conduit à retarder leur mise en place ... »

Rappelons qu'il y a un lien très fort entre les techniques opératoires et la numération.

Possibilité de comparer plusieurs techniques opératoires de la soustraction pour mieux en travailler le sens (reste, complément, écart ou comparaison).

Calcul posé : 63x3 et 120x5

Encadrement

200 < < 300

109 < < 119

750 < < 770

90 < < 100

Evaluation début CE2 de 2006

a) Parmi les nombres 109, 290, 209, 201, 219 entourez ceux qui sont compris entre 200 et 210.

b) Parmi les nombres 317, 290, 430, 340, 34, 395 entourez ceux qui sont compris entre 300 et 400.

« La compréhension de l'ordre (savoir quel est le plus petit ou le plus grand nombre, savoir ranger des nombres) précède l'utilisation des symboles < ou > dont la maîtrise n'est pas un objectif du cycle 2. »

Relations arithmétiques entre les nombres

Moitié de 30

Moitié de 100

Double de 300

Double de 40

Piste de travail : le complément nécessaire à la construction du nombre sur les relations arithmétiques entre les nombres (3, c'est 1+1+1 mais aussi 100 c'est 2 fois 50 travaillé en 50 est la moitié de 100)

Problèmes relevant de l'addition, de la soustraction et de la multiplication.

A. A la récréation, Dimitri joue aux billes. Au début de la partie, il possède 37 billes. A la fin, il a 72 billes. Combien a-t-il gagné de billes ?

B. Pour une fête, Louise a acheté 12 paquets de gâteaux. Chaque paquet contient 4 gâteaux. Combien Louise a-t-elle de gâteaux ?

C. Un jardinier a planté 45 salades. Il a fait trois rangées. Il a mis le même nombre de salades dans chaque rangée. Combien y-a-t-il de salades dans chaque rangée ?

Le problème A n'est pas le plus simple des catégories de Vergnaud, on cherche la transformation. Le vocabulaire employé induit une addition alors qu'il faut faire une soustraction.

Le problème B est un problème de proportionnalité simple, multiplicatif
 $1 \rightarrow 4 ; 12 \rightarrow ?$

L'image de 1 est donnée en dernier ; la forme de l'énoncé pourrait être plus simple.

Pistes de travail : VERIFIER QUE LES LIVRES UTILISES BALAIENT LA VARIETE DES CATEGORIES DE VERGNAUD POUR LE CHAMP ADDITION/SOUSTRACTION .

VOIR LA PROPOSITION DE MISE EN ŒUVRE DU DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT « **LE NOMBRE AU CYCLE 2** ».

Calcul mental de division : $40 : 5$ et $100 : 2$

Approcher la division à partir d'un problème de partage ou de groupements.

Le directeur d'une école de 4 classes doit acheter des cahiers. L'école a 100 élèves. Les cahiers sont vendus en paquets de 5. Combien devra-t-il acheter de paquets de cahiers pour que chaque élève possède un cahier ?

2 compétences sont testées : bien sélectionner les données utiles ; reconnaître et traiter un problème de division.

Ici encore, il n'est pas fait mention dans les possibilités de réussites d'autres opérations que la division ou la multiplication (pas d'addition itérée ou de soustraction itérée), on les cite par contre dans les commentaires.

Quelles fonctions du nombre?

- A. Pour dénombrer
- B. Pour mémoriser une quantité
- C. Pour comparer des collections
- D. Pour calculer, pour anticiper

Des nombres pour, AVANT TOUT,
résoudre des problèmes.

Autrement dit les différentes fonctions
du nombre devront émerger de
situations problèmes

Des situations de référence sur la numération

Stabiliser et accroître la suite des nombres

Activités rituelles de connaissance du nombre au CP :

- La marionnette qui se trompe
- La suite des nombres qu'on dit dans la tête à chaque coup de tambourin, on dit le nombre sur lequel on s'arrête.
- Complexification de la comptine : Le furet et la fusée
- Les comptines numériques, les livres à compter
- La bande numérique, la "corde à linge" des nombres
- les jeux (les familles, les réussites avec les cartes, le loto ...).

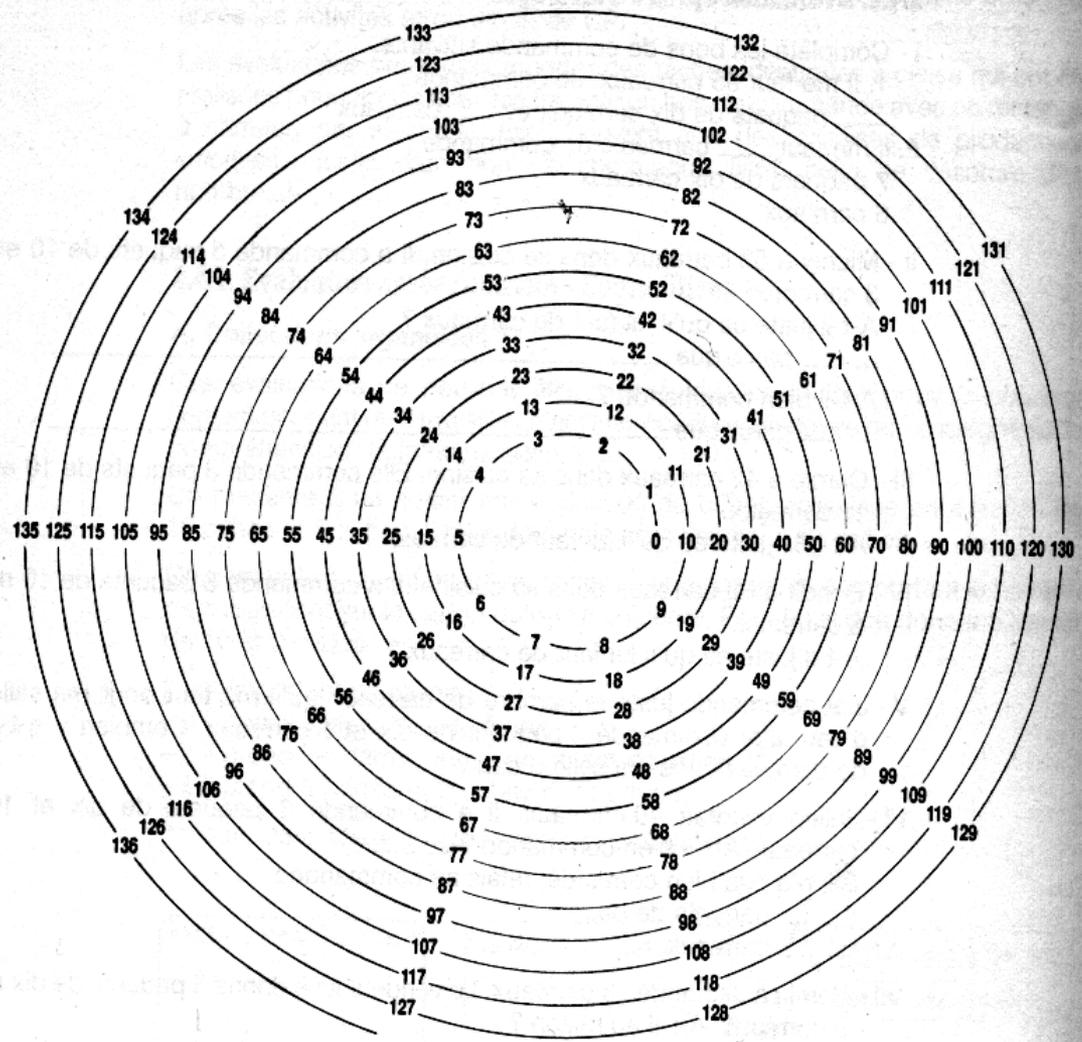
Les situations-problèmes

- où le nombre est mémoire d'une quantité (mosaïques, robot)
- où le nombre sert à comparer des quantités (boîtes alignées ou empilées)
- où le nombre sert à calculer (le gobelet, la monnaie ...).

L'algorithme de la suite des nombres

- le château
(des dizaines pour le CE1)
- les compteurs
- les différentes représentations de la suite des nombres structurée
(droite graduée, spirale, cible, tableau).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12		14	15		17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27		29
30	31	32	33		35	36	37	38	
40		42	43	44		46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	
70	71		73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83		85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	



Les groupements et les échanges

- le banquier (base dix) ou le jeu du casino ; le jeu du banquier cheval
- les fourmillions (au CP puis au CE1 et au CM1)

Le jeu du banquier (ERMEL CP) adapté avec le matériel « base 10 ».

Phase 1: appropriation du matériel et de la règle de jeu en collectif puis en groupe d'élèves; comparaison des collections après jeu

Phase 2: il y a un banquier, un secrétaire, deux joueurs:

Etape 1: jeu

- ❖ le banquier donne les jetons demandés par le joueur,
- ❖ le secrétaire note pour chaque joueur le nombre de points en écriture chiffrée sur une feuille de jeu,
- ❖ chaque joueur met les jetons gagnés dans une enveloppe;

Etape 2: retrouver ce qu'il y a dans les enveloppes

on échange les feuilles de jeu avec un autre groupe qui doit deviner ce qu'il y a comme jetons dans les enveloppes à partir de la feuille de jeu

Phase 3 et 4: vers l'addition et la soustraction: voir dernière partie

L'écriture des nombres

- en chiffres et en lettres (la marchande au CP, le caissier au CE1)
- savoir tirer toutes informations de l'écriture d'un nombre (la louche trouée CE1)
- utilisation d'une calculatrice

-On affiche 12 sur la calculatrice puis sans effacer en utilisant les touches opérations on doit afficher 22 puis 32
- Après un jeu de portrait de nombre sur l'ardoise, le faire avec une calculatrice.

La compréhension de la numération est essentielle pour

- comprendre les règles de comparaison des nombres.
- construire les techniques opératoires des opérations

Calcul, le sens : problèmes du champ addition/soustraction

En cycle 2 on propose des problèmes qui permettent de parcourir les catégories définies par Gérard Vergnaud sur les problèmes du champ addition/soustraction

C'est souvent avec des problèmes portant sur des calculs que se fait la mise en place du contrat de résolution de problème.

- écriture de questions puis d'énoncés sur un document (image, tableau simple, texte)
- passage d'une " histoire " à un énoncé mathématique et vice-versa.

Exemple de travail sur l'énoncé en CE1 (Michel Sarrouy)

1. Résolution individuelle du problème : *Loïc a 32 billes. A la récréation il perd 10 billes. Combien lui en reste-t-il à la fin de la récréation?*

2. Correction collective du problème : On raconte l'histoire de Loïc, collectivement on construit le récit à partir de l'énoncé et de la nouvelle information

Ex. : Loïc avait 32 billes, mais, en jouant à la récréation, il en a perdu 10 et maintenant il a 22 billes.

Question : Que pourrait-on enlever de ce récit pour élaborer de nouveaux problèmes ?

Loïc avait 32 billes avant la récréation, il en a 22 après.

Combien a-t-il perdu de billes ?

Loïc a perdu 10 billes en jouant à la récréation. Il lui en reste 22. Combien avait-il de billes avant de jouer ?

3. Par groupe de 3, et à partir d'un récit : On demande aux élèves de transformer un récit en énoncé de problème. Ensuite ils résolvent ce même problème.
4. Phase collective : Trace écrite (affiche, tableau, ...) à partir de la question : Qu'est-ce qu'un problème ?

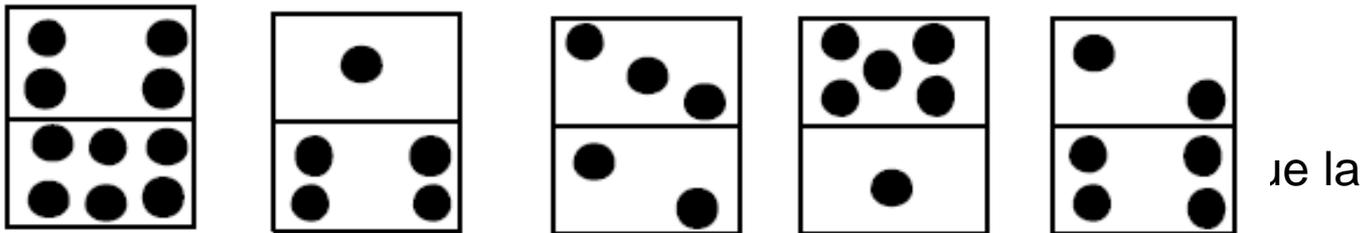
La résolution de problème passe toujours par des compétences de maîtrise de la langue :

Compréhension de l'énoncé, communication de la solution, début d'argumentation, production d'écrits (privé, de communication, de référence).

Des problèmes que les enfants résolvent avec plaisir.

L'addition en GS ou au début du CP

Nolwen prend cinq dominos comme ceci :



Elle veut que les deux rangées fassent 16 points chacune.

Aide Nolwen en bougeant le moins de dominos possibles.

Dessine ce que tu as trouvé.

Les comparaisons en fin de CP ou CE1.

Voici un mur de pierres :

41	71	24	73	81
58	29	63	45	72
73	45	71	60	97
42	38	68	35	63
88	91	81	72	75

Le trésor est caché derrière une pierre.

Cette pierre est entourée de pierres marquées de nombres plus grands que 59. Écris le numéro de la pierre.

Des additions dans l'espace !



ÉVARISTE

Tour de dés



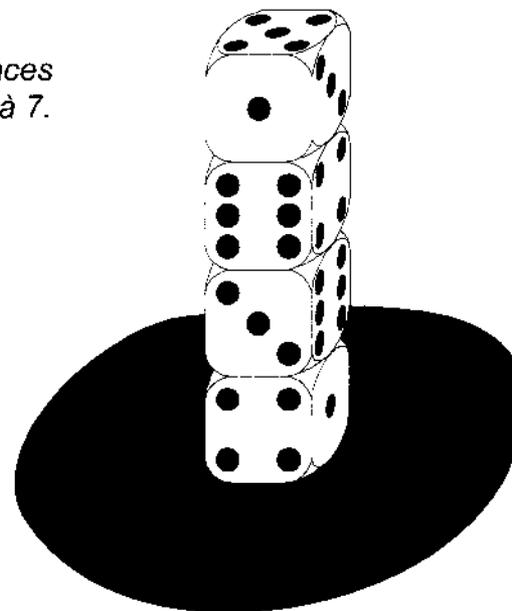
34



Le total des points placés sur deux faces opposées d'un dé est toujours égale à 7.

Monsieur Arty Zan a construit cette tour avec des dés géants.

Combien de points comptera Monsieur Élie Coptair qui survole et contourne cette tour ?



Rallye mathématique de Loire-Atlantique 1996

APMEP - Fichier ÉVARISTE École

Des problèmes pour approcher la division

I.O. : **approcher la division** en CE1 par des problèmes de partage ou de groupements.

Une **progression** de problèmes devrait être mise en place à partir de la GS.

Un exemple est proposé par l'INRP dans « chacun, tous, ...différemment »:

GS : les caisses

Les élèves doivent répartir n caisses entre p camions sachant que chaque camion doit transporter « pas moins de a caisses mais pas plus de b caisses ».

Phase d'appropriation collective :

3 camions, 13 caisses, entre 3 et 5 caisses par camion. Un groupe expérimente la situation ; l'enseignant interagit par des reformulations, des demandes de validation intermédiaires ; les autres élèves observent. (cette phase peut se poursuivre en un travail par petit groupe)

Phase de recherche :

Les élèves peuvent modifier leur chargement au fur et à mesure, par groupes relativement homogènes avec la présence du maître (7 camions, entre 21 et 39 caisses, chargements 2-4 ou 3-5 ou 4-6, ...)

Phase de reprise

CP : les enveloppes

Les élèves doivent répartir n objets (entre 10 et 40) dans p enveloppes (entre 4 et 7), chaque enveloppe pouvant contenir 3 à 5 objets. Dans un 1er temps, les objets et les enveloppes sont présents, puis les enfants n'ont que papier et crayon pour faire la répartition.

Phase d'appropriation

Phase de résolution sans matériel

Phase de reprise

CE1 : partage équitable de jetons

Les élèves doivent trouver le résultat de partages équitables en 3 ou 4 parts sans avoir recours à un matériel. Ils devront formuler leur réponse et trouver un moyen de la vérifier.

Phase d'appropriation

Phase de résolution : « je veux partager 36 jetons en 3 paquets. Il doit y avoir autant de jetons dans chaque paquet. Combien y aura-t-il de jetons dans chaque paquet ? Écris ta réponse à l'aide d'une phrase. Écris pourquoi tu penses que c'est bon. »

Phase de reprise.

Une technique opératoire

- Le calcul mental ou le calcul réfléchi sont des techniques opératoires.
- Le calcul posé démarrera dans des situations où le calcul mental devient coûteux (tout en étant possible)
- Cas de la soustraction : trois techniques
 - ❖ « classique française » avec dans le cas d'une retenue rajout de 10 unités à a et 1 dizaine à b (règle des écarts)
 - ❖ Anglo-saxonne, dite « par emprunt » ou naturelle
 - ❖ Par addition à trou