POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

Enseigner les différentes stratégies de calculs au cycle 2

Temps 1 de la Formation
Distanciel
Lecture personnelle

Math É sciences31

académie Toulouse
direction des services départementaux de l'éducation nationale Haute-Garonne

FORMATION
2020 - 2021

Déroulement du temps1

1. **Introduction**
2. **Les différentes stratégies de calcul**
3. **Calcul posé :** enseigner les algorithmes
   - La soustraction
   - La multiplication
4. **Multiplier par 10 ou 100 :** une compétence de numération
5. **Synthèse :** les incontournables de d'enseignement du calcul posé

POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

1. Introduction

Math É sciences 31

académie Toulouse

direction des services départementaux de l'éducation nationale Haute-Garonne

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Objectif spécifique

Répondre aux questions :

Quelles sont les différentes stratégies de calcul ?
Quelle est la place du calcul posé dans les apprentissages ?
Comment enseigne-t-on les algorithmes ?
Quelle procédure pour x10 ou x100 ?

Ressources institutionnelles

- **Les ajustements des programmes**, BO n°30 du 26 juillet 2018
- **Les repères annuels de progression** (mathématiques)
- **Les attendus de fin de CP, CE1, CE2** (mathématiques)

Ressources spécifiques sur le nombre et le calcul

- **Enseignement du calcul : un enjeu majeur pour la maîtrise des principaux éléments de mathématiques à l'école primaire,** note de service n° 2018-051 du 25 avril 2018
- **Le calcul aux cycles 2 et 3,** Ressources Eduscol, mars 2016
- **Le calcul en ligne au cycle 2,** Ressources Eduscol, mars 2016
- **Le nombre au cycle 2,** SCEREN

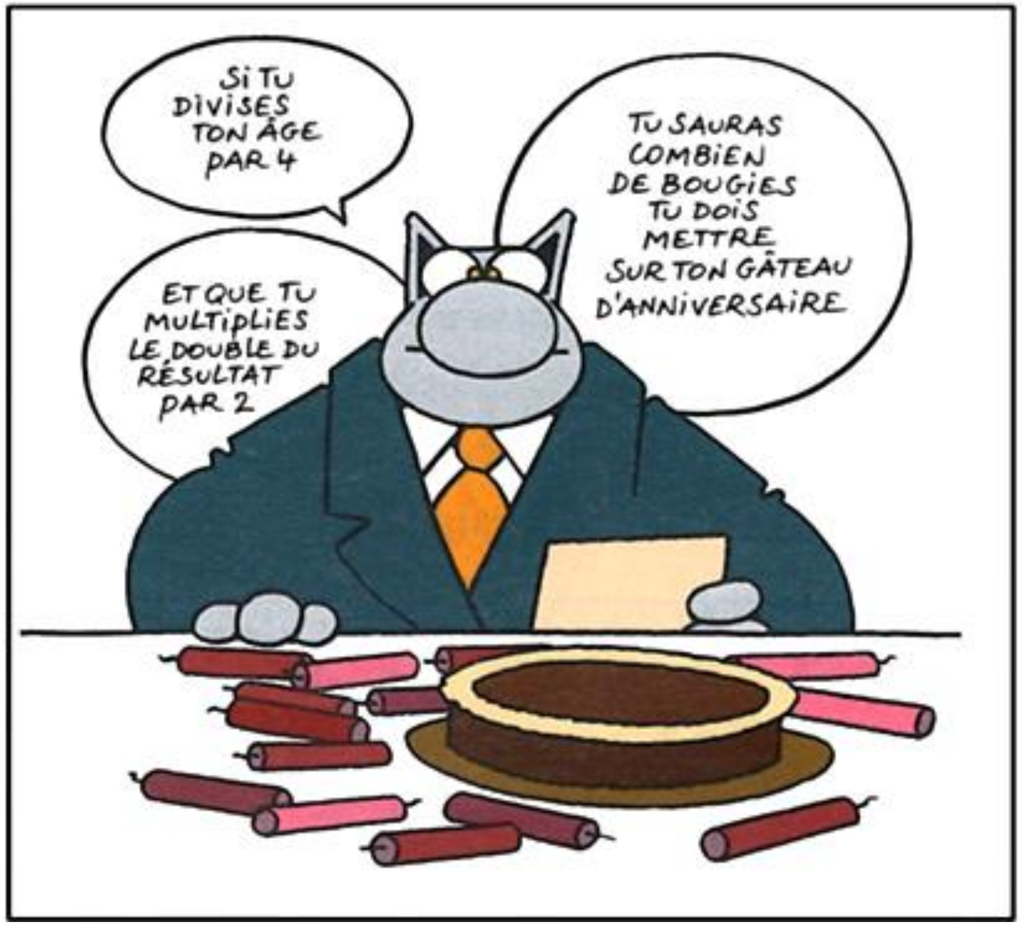
POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

2. Les différentes stratégies de calcul

MathÉsciences31

académie Toulouse
direction des services départementaux de l'éducation nationale Haute-Garonne

Calculs ?



Calcul mental ?

Calcul posé ?

Calcul en ligne ?

Calcul instrumenté ?

Calcul approché ?

Calculs ? Vous les reconnaissez ?

Une modalité de calcul **sans recours à l'écrit** si ce n'est, éventuellement, pour l'énoncé proposé par l'enseignant et la réponse fournie par l'élève. Il n'est pas exclu non plus que la correction, elle, soit écrite pour être discutée de façon collective.

Calcul mental

Une modalité de calcul écrit consistant à l'**application d'un algorithme opératoire**.

Calcul posé

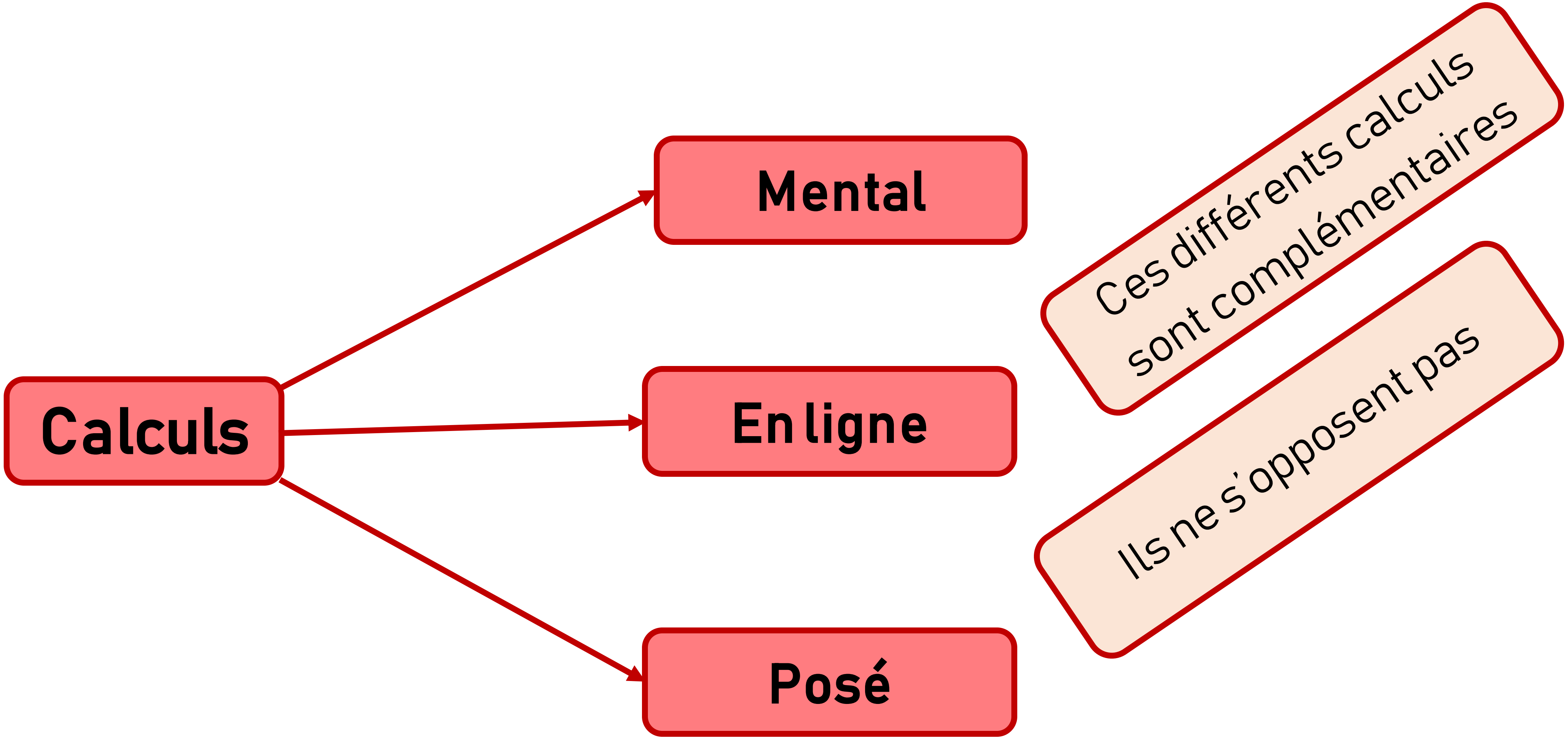
Une modalité de calcul **écrit utilisant des écritures additives, soustractives, multiplicatives ou mixtes des nombres en jeu.**

Calcul en ligne

A partir de Eduscol, le calcul aux cycles 2 et 3 et des programmes

Synthèse :

Des stratégies de calcul adaptées aux nombres et aux opérations en jeu.



Calcul effectué **à l'aide d'un ou plusieurs instruments**, appareils ou logiciels : abaque, boulier, calculatrice, tableur…

Calcul permettant de **déterminer un ordre de grandeur**. Il est particulièrement utile pour contrôler un résultat et développer l'esprit critique.

Résultats mémorisés : tables, doubles, moitiés, compléments à 10…

Stratégies de calculs du type :
« Pour ajouter 9 c'est ajouter 1d et retrancher 1u »

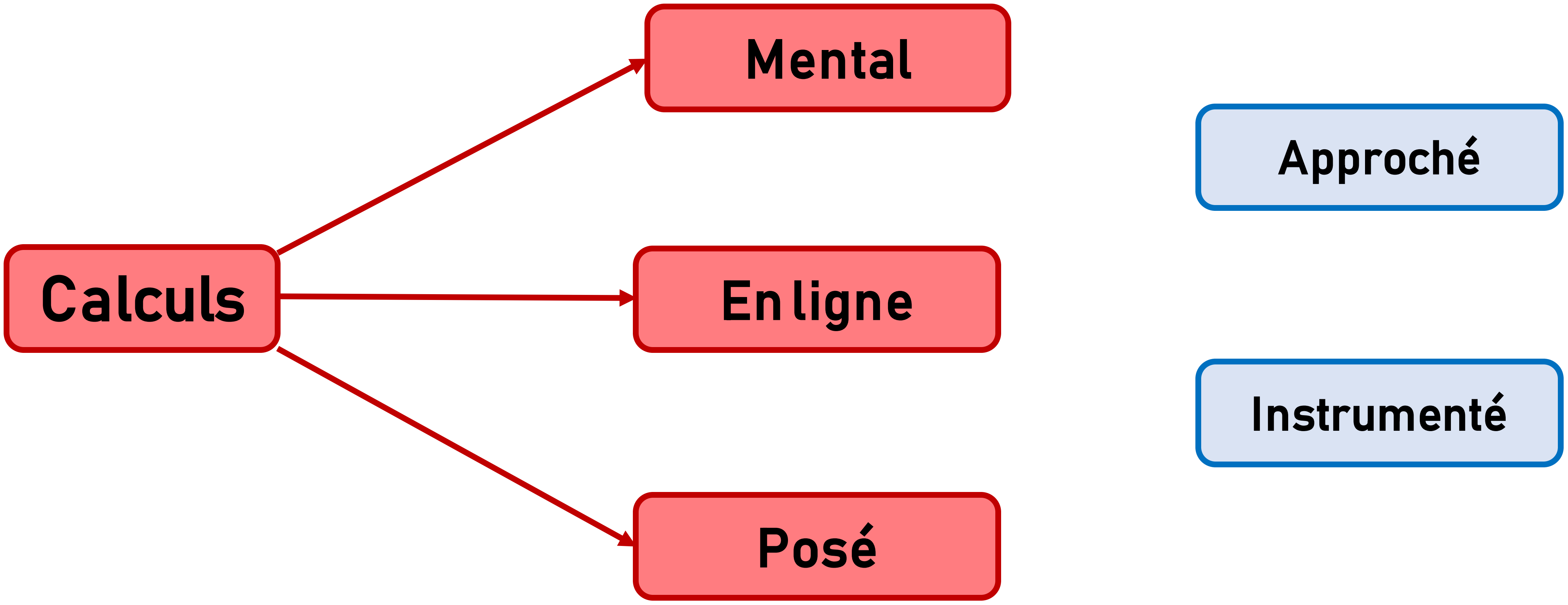
Calcul instrumenté

Calcul approché

Faits numériques

Procédures automatisées

Synthèse :



Synthèse

Ces stratégies s'appuient sur la connaissance…

Calculs → Mental

Calculs → En ligne

Calculs → Posé

- De la numération décimale de position
- Des faits numériques
- De procédures
- Des propriétés des opérations
- D'algorithmes

Progression : du sens de l'opération au calcul posé

→ Apprentissage des quatre opérations qui repose d'abord sur la compréhension du **sens** de ces opérations

→ Apprentissage de l'usage du **symbole** mathématique

→ Apprentissage du **calcul en ligne** et du **calcul mental**

→ Apprentissage du **calcul posé**

Sens → Signe opératoire → Calcul mental/Calcul en ligne → Calcul posé

POUR L'ÉCOLE DE LA CONFIANCE

3. Calcul posé

La soustraction
La multiplication

Math É sciences31

académie Toulouse
direction des services départementaux de l'éducation nationale Haute-Garonne

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Le calcul posé

C'est une technique, un algorithme, c'est-à-dire une succession d'étapes à réaliser toujours dans le même ordre et de la même manière **indépendamment des nombres en jeu.**

- ➔ méthode de calcul sécurisante car systématique ne nécessitant pas d'adaptation aux nombres en jeu
- ➔ permet de comprendre le fonctionnement d'un algorithme
- ➔ nécessite la connaissance de <u>certains</u> faits numériques (uniquement les tables)
- ➔ agit plus souvent sur les chiffres des nombres
- ➔ permet de réinvestir certaines connaissances sur la numération (conversion)

Le calcul posé

Repères annuels et attendus de fin de CP, CE1 et CE2

Les élèves enrichissent d'abord la mémorisation de faits numériques et de procédures. Au plus tard en **période 4**, les élèves apprennent à poser les additions en colonnes avec des nombres de deux chiffres.	Dès le **début de l'année**, les élèves consolident la maîtrise de l'addition avec des nombres plus grands et avec des nombres de taille différente. Ils continuent à enrichir la mémorisation de faits numériques et de procédures. Au plus tard en **période 3**, les élèves apprennent une technique de calcul posé pour la soustraction.	Dès le **début de l'année**, les élèves consolident la maîtrise de la technique de la soustraction apprise en CE1. Ils apprennent et entretiennent **tout au long de l'année** une technique de calcul posé pour la multiplication, tout d'abord en multipliant un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre puis avec des nombres plus grands.

Addition avec deux ou trois nombres à 1 ou 2 chiffres.

Addition avec deux ou trois nombres à 1, 2 ou 3 chiffres.

Soustraction avec deux nombres à 1, 2 ou 3 chiffres.

Addition avec deux ou trois nombres à 1, 2, 3 ou 4 chiffres.

Soustraction avec deux nombres à 1, 2, 3 ou 4 chiffres.

Multiplication d'un nombre à 2 ou 3 chiffres par un nombre à 1 ou 2 chiffres.

Le calcul posé : Quelques stratégies d'enseignement

- ➔ Introduire le calcul posé en aval d'activités de calcul mental ou en ligne lorsque ceux-ci ont montré leur limite en termes d'efficacité
- ➔ Faire s'entrainer les élèves dans la durée
- ➔ Développer chez les élèves une attitude réflexive face aux erreurs
- ➔ Choisir le même algorithme de calcul posé pour toute la scolarité
- ➔ Choisir les mêmes modes d'écriture et la même verbalisation
- ➔ Justifier mathématiquement pour aider à la compréhension de l'algorithme
- ➔ Inciter à utiliser des moyens de vérification (calculette, opération inverse, calcul approché…)

Enjeux du calcul à l'école primaire
Jean-Paul FISCHER, Université de Lorraine, CNESCO

- Les **techniques opératoires**, en particulier posées, ne sont parfois pas réellement comprises, mais se transforment en **activités répétées systématiquement et aveuglément**.

- Si le calcul posé est logique pour certaines opérations comme la multiplication, il peut, dans le cas de la soustraction, conduire l'élève à la **confusion car il ne respecte pas les règles de calcul enseignées précédemment** ; l'**apprentissage du calcul mental est dans ce cas préférable**.

- L'introduction des **différentes opérations doit suivre l'ordre logique découlant des liens entre ces opérations** : l'addition et la soustraction doivent être enseignées simultanément et en premier lieu, suivies de la multiplication et de la division.

La soustraction posée
Les différents algorithmes

Les 3 algorithmes de la soustraction pratiqués à l'école primaire

72 – 25 = ?

- ## Par emprunt (par cassage)

➔ Repose sur une autre écriture du premier terme.

$$\begin{array}{rcc} & 6 & \\ & \cancel{7} & 12 \\ - & 2 & 5 \\ \hline & 4 & 7 \end{array}$$

- ## Par compensation (usuelle, française)

➔ Repose sur une propriété de la soustraction : conservation de l'écart par ajout d'un même nombre aux deux termes

$$\begin{array}{rcc} & 7 & 12 \\ - & 2 & 5 \\ & 1 & \\ \hline & 4 & 7 \end{array}$$

- ## Par addition à trou

➔ Repose sur l'équivalence entre soustraction et recherche de complément

$$\begin{array}{rcc} & 1 & \\ & 2 & 5 \\ + & 4 & 7 \\ \hline & 7 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcc} & 7 & 2 \\ - & 2 & 5 \\ & 1 & \\ \hline & 4 & 7 \end{array}$$

Quel algorithme de soustraction choisir ?

« Pour la soustraction, le choix de l'algorithme (compensation ou emprunt) relève de l'équipe d'école. On aura intérêt à conserver le même durant les quatre années concernées (du CE1 au CM2). »

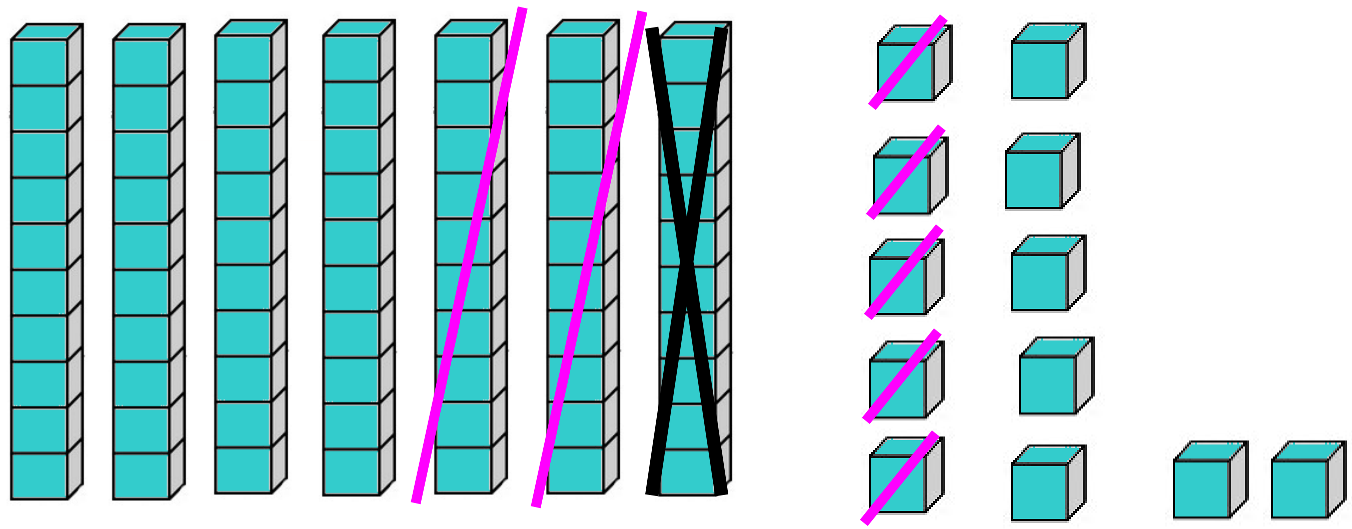
*« **Enseignement du calcul : un enjeu majeur pour la maîtrise des principaux éléments de mathématiques à l'école primaire** note de service n° 2018- 051 du 25-4-2018 du BO n°3 du 26 avril 2018 »*

« Les techniques de calcul posé sont <u>communes à toutes les classes</u>, elles sont ritualisées <u>avec les mêmes formes et les mêmes mots</u>. Ce choix doit être <u>poursuivi au cycle 3</u>. »

*« **Repères annuels de progression**, Mathématiques, CP, CE1, CE2*

La soustraction posée
L'algorithme par emprunt (cassage)

La soustraction méthode par emprunt (cassage)



7d + 2u → 6d + 12u

- 2d - 5u

On représente la grande collection

On effectue le cassage

On barre le nombre d'éléments correspondant au deuxième terme

Transformation de quantités

	recherche de l'état final	recherche de la valeur de la transformation	recherche de l'état initial
Transformation positive	$E_i \xrightarrow{T^+} E_f$	$E_i \xrightarrow{T^+} E_f$	$E_i \xrightarrow{T^+} E_f$
Transformation négative	$E_i \xrightarrow{T^-} E_f$	$E_i \xrightarrow{T^-} E_f$	$E_i \xrightarrow{T^-} E_f$

Sens de la soustraction « enlever »

La méthode par emprunt (cassage) : les « reproches » classiques

« Lorsque le grand nombre a 3 chiffres et lorsqu'il s'écrit avec un zéro comme chiffre des dizaines, la gestion d'une telle procédure devient beaucoup plus complexe :

$$\begin{array}{rccc} & 5 & 9 & \\ & \cancel{6} & {}_{1}\cancel{0} & {}_{1}4 \\ - & 4 & 2 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Pour transformer une dizaine en 10 unités, comme le chiffre des dizaines est zéro, il faut d'abord casser une centaine qui devient 10 dizaines. On peut alors casser l'une de ces 10 dizaines. En fait, le principal reproche qu'on peut faire à cette procédure est qu'elle conduit à une surcharge d'écritures, et qu'à terme **il faudra nécessairement que les élèves apprennent une autre façon de calculer les soustractions en colonnes** (notamment lorsqu'il s'agira de faire des soustractions au sein de divisions posées avec la « potence »). »

Et avec des zéros intermédiaires… au contraire !

	5	9	
	~~6~~	~~0~~	14
-	4	2	8

	3	9	9	
	~~4~~	~~0~~	~~0~~	13
-		5	6	7

Lorsque le grand nombre comprend un zéro (chiffre des dizaines).

➔Permet d'utiliser les décompositions :
604 = 59d + 14u
ou les conversions : **60d = 59d + 10u**

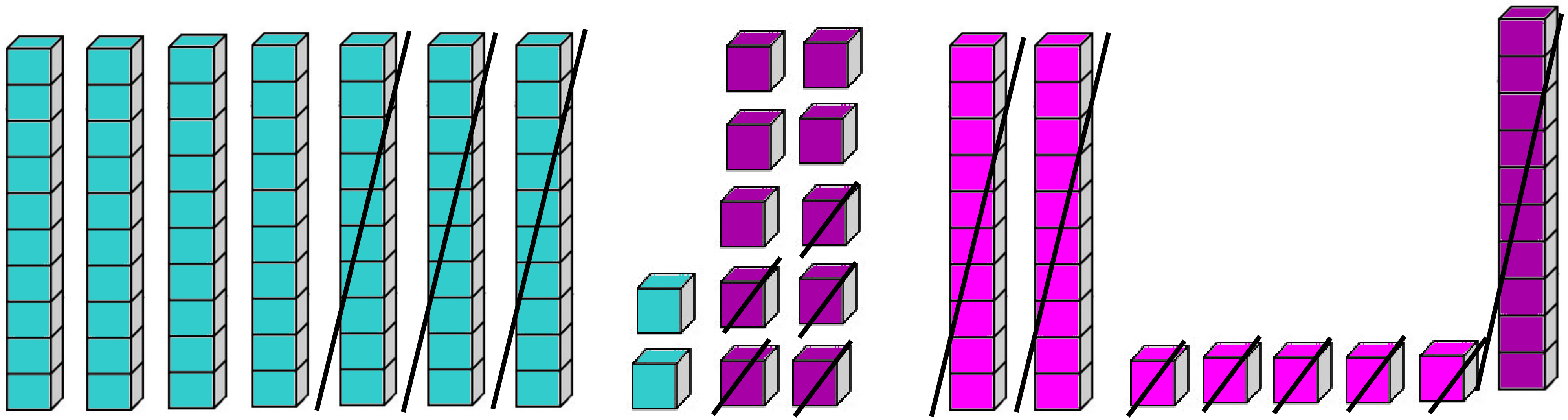
Lorsque le grand nombre comprend deux zéros (chiffre des dizaines et des centaines).

➔Permet d'utiliser les décompositions : **4003 = 399d + 13u**
ou les conversions : **400d = 399d + 10u**

La soustraction posée

L'algorithme par compensation (française)

La soustraction méthode par compensation (française)



On représente les deux collections

On ajoute 1d ou 10u à chaque collection

On effectue une correspondance terme à terme

Sens de la soustraction
« écart »

Comparaison de quantités

	recherche de E_2	recherche de C	recherche de E_1
Comparaison positive	$E_1 \updownarrow E_2$ C^+	$E_1 \updownarrow E_2$ C^+	$E_1 \updownarrow E_2$ C^+
Comparaison négative	$\boxed{E_1 \updownarrow E_2 \quad C^-}$	$E_1 \updownarrow E_2$ C^-	$E_1 \updownarrow E_2$ C^-

La méthode par compensation (française)

-ne permet pas de travailler autant les propriétés de la numération

-sens plus difficile (écart)

-renvoie aux problèmes de comparaison (plus difficiles)

-algorithme plus complexe (action sur les deux termes)

-écritures différentes d'un manuel à l'autre

-fondée sur la propriété de l'opération : conservation d'un écart par ajout d'un même nombre aux deux termes assez abstraite

-compréhension de cette propriété va nécessiter un enseignement spécifique

Compréhension de la règle des écarts : un enseignement spécifique

$$\begin{array}{ccc}
 & 7\,534 - 4\,857 & \\
+3 & & +3 \\
 & 7\,537 - 4\,860 & \\
+40 & & +40 \\
 & 7\,577 - 4\,900 & \\
+100 & & +100 \\
 & 7\,677 - 5\,000 & \\
 & 2\,677 &
\end{array}$$

La méthode dite « Russe »

__Principe :__

ajouter à chaque terme de la soustraction les mêmes nombres pour que le deuxième terme devienne successivement :

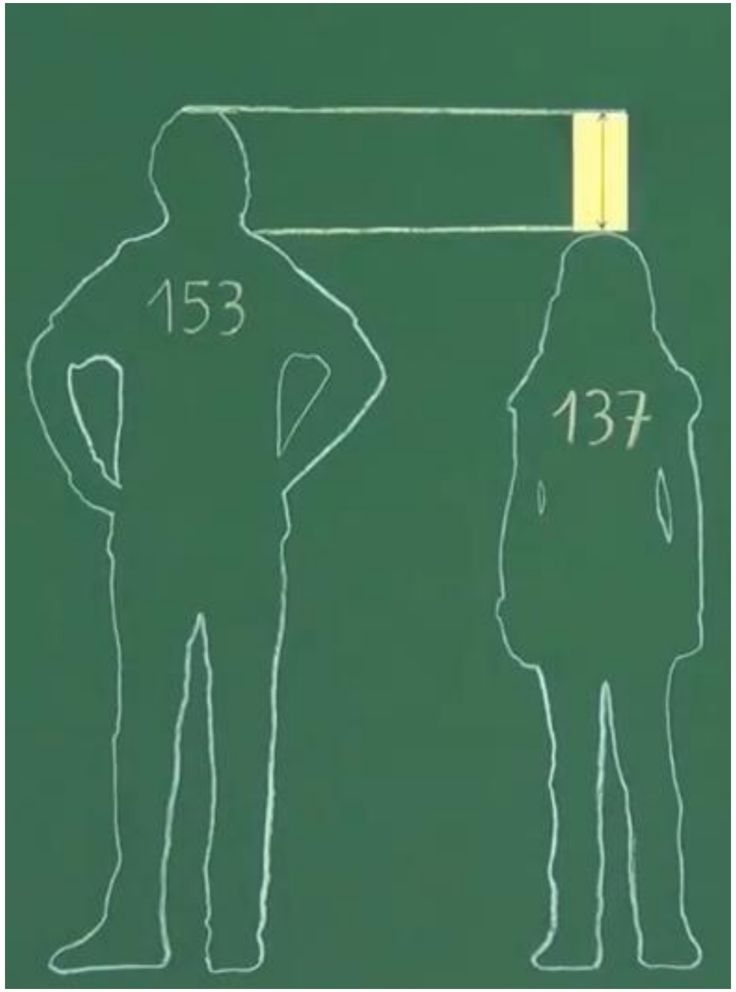
un nombre entier de dizaines

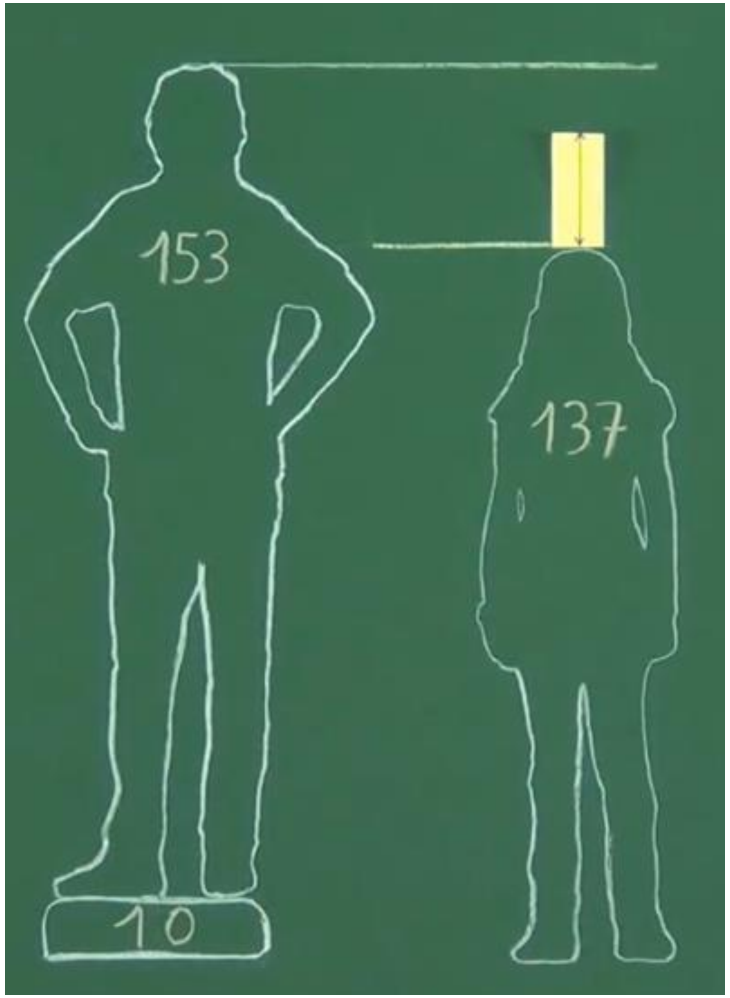
puis un nombre entier de centaines

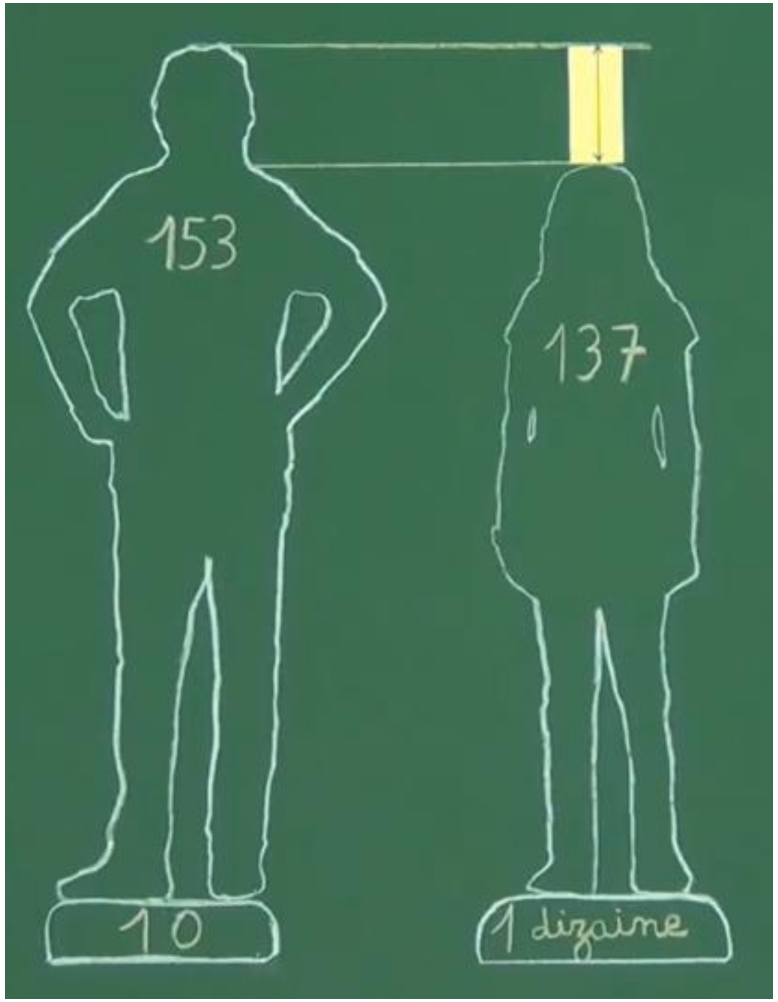
puis un nombre entier de milliers

Compréhension de la règle des écarts : un enseignement spécifique

L'écart est conçu comme la comparaison entre deux mesures.

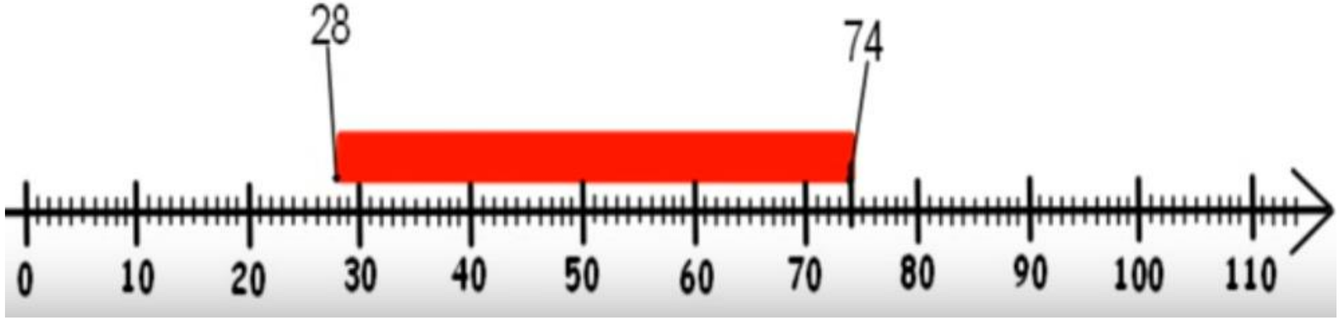






Compréhension de la règle des écarts : un enseignement spécifique

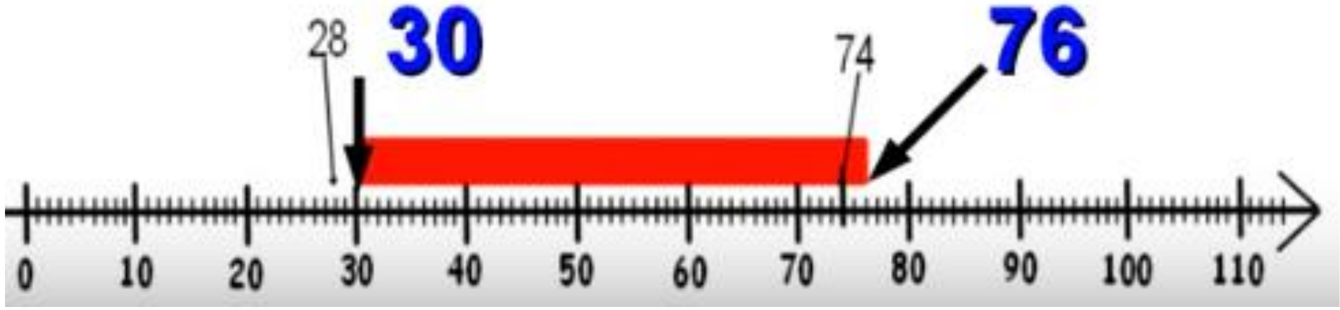
L'écart est conçu comme la « distance » entre deux nombres sur la droite numérique.



$74 - 28 = ?$

$76 - 30 = ?$

Décalage : translation pour atteindre un nombre rond



$76 - 30 = 46$

donc $74 - 28 = 46$

Quelles sont les erreurs les plus fréquentes des élèves?

- **Erreur dans l'ordre des termes**

Le plus grand nombre est soustrait au plus petit
➔ *Application à la soustraction de la commutativité connue pour l'addition*

- **Erreur dans la disposition des nombres**

Les unités de même ordre ne sont pas situées l'une sous l'autre
➔ *Non maitrise ou non réinvestissement des connaissances de la numération de position*

- **Erreur dans les retenues**

Pas de répercussion des calculs par des retenues sur le rang supérieur
Retenues notées mais non prises en compte
Retenues notées systématiquement

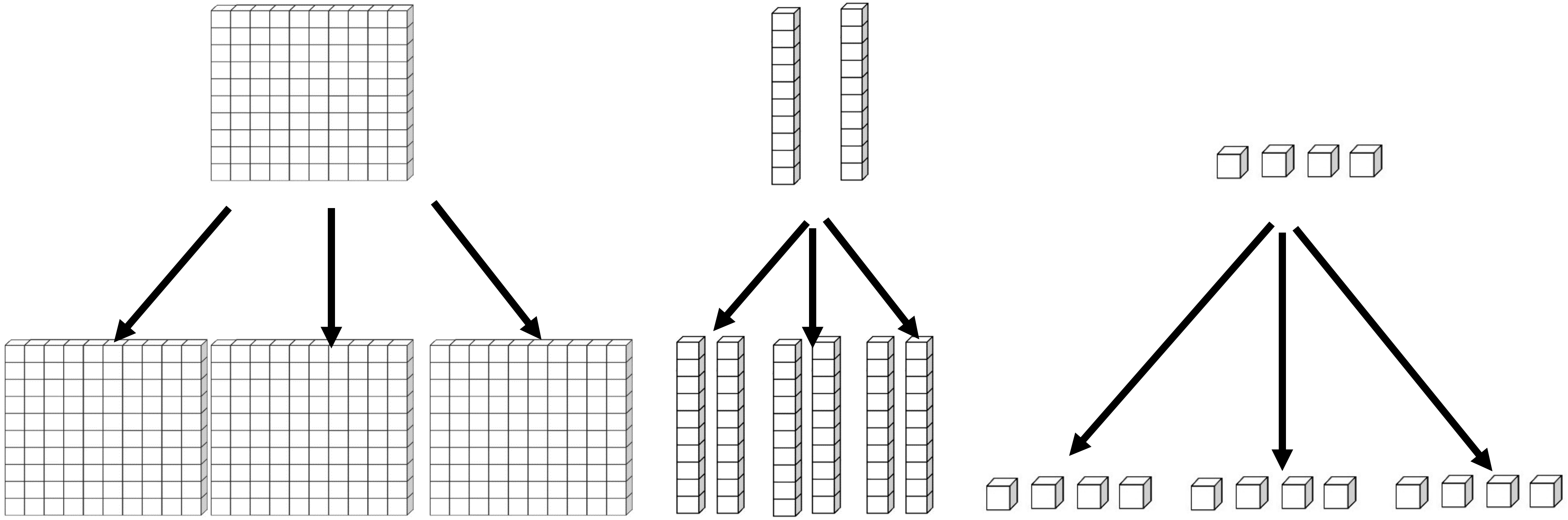
- **Erreur dans les calculs portant sur chaque ordre d'unités**

Calcul pour chaque ordre d'unité de l'écart entre le plus grand et le plus petit nombre
➔ *Commutativité appliquée sur la soustraction sur les chiffres*
Difficulté avec le « 0 » : 0 – n = 0.
➔ *Conception du 0 particulière*
Ecart de 1 dans les calculs
➔ *Faits numériques non mémorisés ou erreur de sur-comptage ou décomptage*

La multiplication posée

Manipulation et calcul en ligne associé : 124 x 3

1c + 2d + 4u



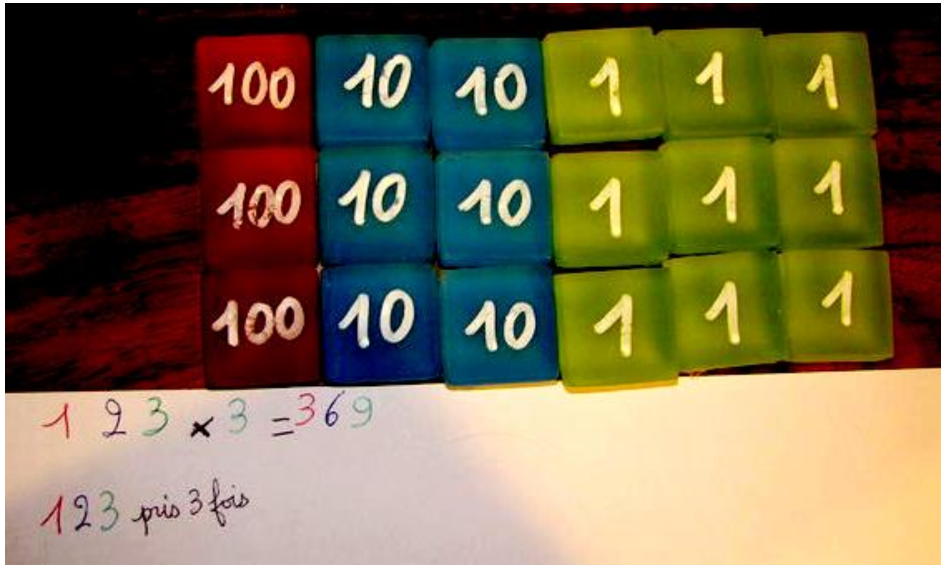
3c + 6d + 12u

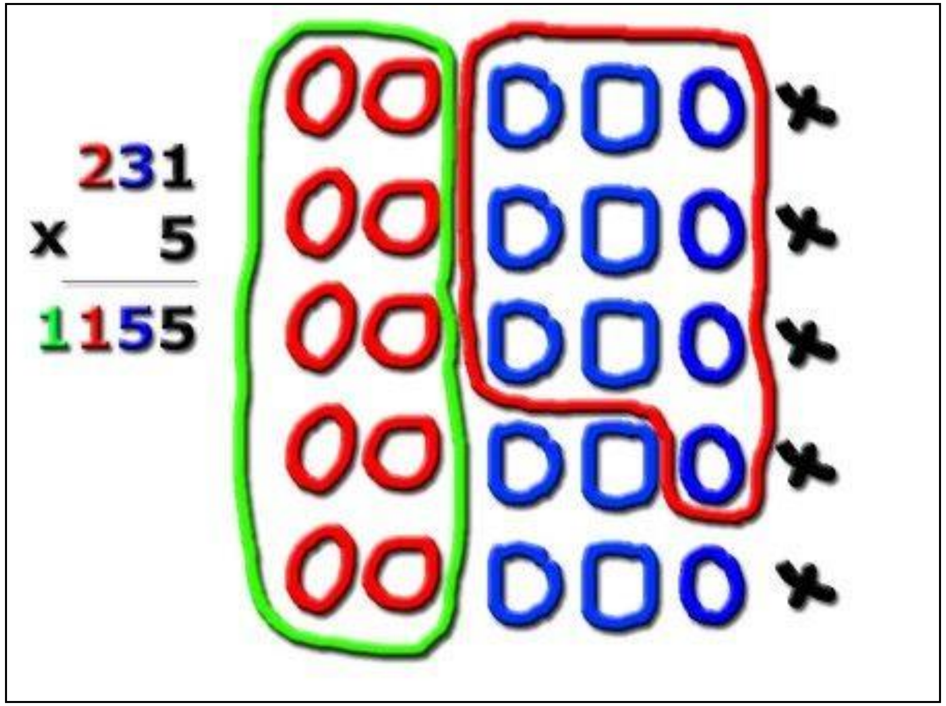
$$124 \times 3 = (1c + 2d + 4u) \times 3 = 3c + 6d + 12u = 3c + 7d + 2u = 372$$

Notre algorithme

$$\begin{array}{rcrcl} & & 124 & & \\ & & \times \quad 23 & & \\ \hline & & 372 & \leftarrow & 124 \times 3 \\ 124 \times 2 & \rightarrow & + \quad \boxed{248}0 & \leftarrow & 124 \times 20 \\ \hline & & 2852 & & \end{array}$$

Quelques représentations





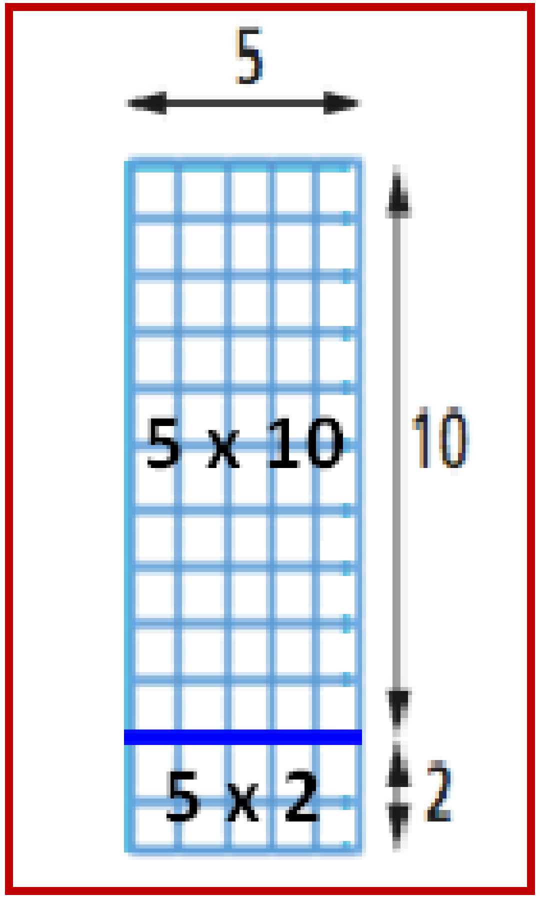
123 x 3

Sans retenue

231 x 5

Avec retenues

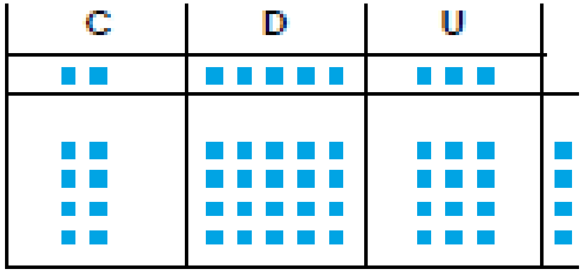
Une autre représentation : les rectangles



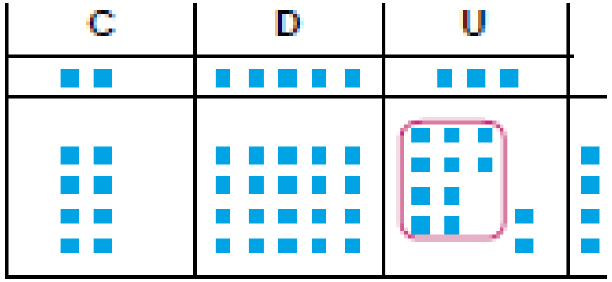
5 x 12 = 5 x 10 + 5 x 2 = 50 + 10 = 60

➔ Permet de « visualiser » la distributivité de la x sur +

Une autre représentation : les abaques

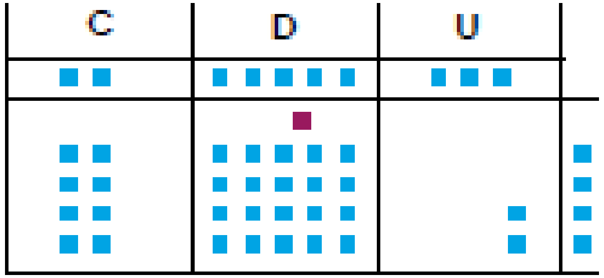


$$\begin{array}{r} 253 \\ \times \quad 4 \\ \hline \end{array}$$



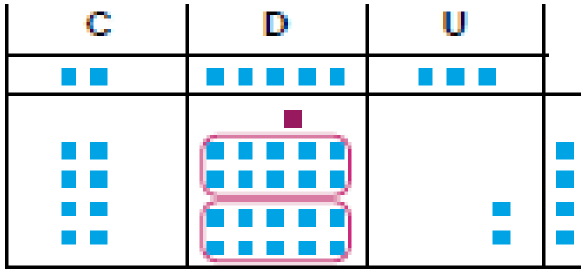
$$\begin{array}{r} 253 \\ \times \quad 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

4 x 3u = 12u



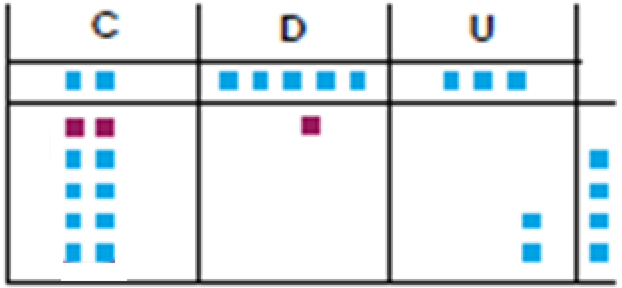
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,} \\ 253 \\ \times \quad 4 \\ \hline 2 \end{array}$$

12u = 1d + 2u



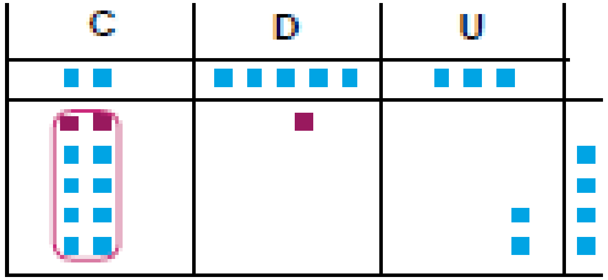
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,} \\ 253 \\ \times \quad 4 \\ \hline 212 \end{array}$$

(4 x 5d) + 1d = 21d



$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,1\,} \\ 253 \\ \times \quad 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

21d = 2c + 1d



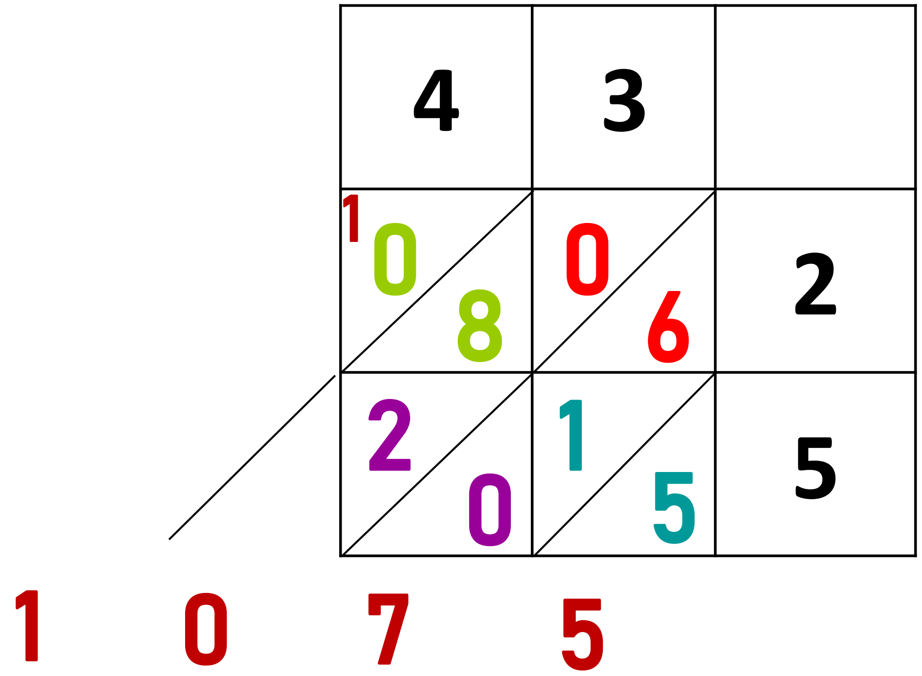
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,1\,} \\ 253 \\ \times \quad 4 \\ \hline 1012 \end{array}$$

(4 x 2c) + 2c = 10c

D'autres techniques opératoires de la multiplication

Per gelosia

➔ Calculer **43 x 25 = ?**



(40 + 3) x (20 + 5) ➔ 4 produits partiels

3 x 20 = 60 ➔ 6 dizaines

3 x 5 = 15 ➔ 15 unités

40 x 20 = 800 ➔ 8 centaines

40 x 5 = 200 ➔ 20 dizaines

D'autres techniques opératoires de la multiplication

La méthode en coupe

➔ Calculer 43 x 25 = ?

➔ (40 + 3) x (20 + 5)

4 produits partiels

3 x 20 = 60 ➔ 6 dizaines

3 x 5 = 15 ➔ 15 unités

40 x 20 = 800 ➔ 8 centaines

40 x 5 = 200 ➔ 20 dizaines

$$
\begin{array}{r}
43 \\
\times\, 25 \\
\hline
{}^{1} \\
06 \\
+\ 0815 \\
+\ 20 \\
\hline
1075
\end{array}
$$

POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

MathÉsciences31

académie Toulouse

direction des services départementaux de l'éducation nationale Haute-Garonne

4. Multiplier par 10 ou 100 :
une compétence de numération

Multiplier un nombre entier par 10

Proscrire « les règles des zéros » du type :

~~« Pour multiplier un nombre par 10,~~
~~il faut ajouter un zéro »~~

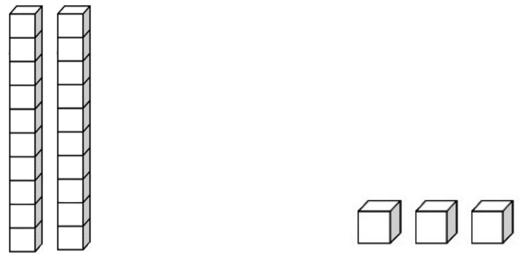
~~« Pour multiplier un nombre par 10,~~
~~il faut écrire un zéro à droite du nombre. »~~

➔ **Elles ne sont plus valables pour les nombres décimaux**

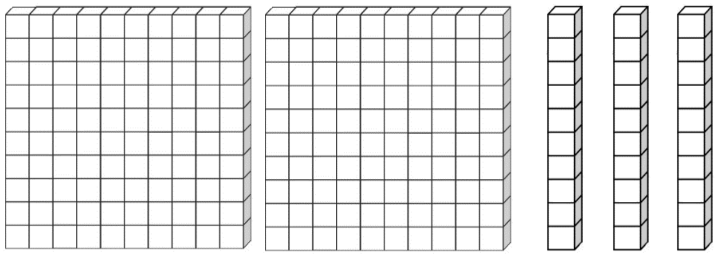
➔ **Elles sont donc génératrices d'erreurs du types 1,5 x 10 = 1,50**

Multiplier un nombre entier par 10

23 x 10



2d + 3u



2c + 3d

Centaines	Dizaines	Unités
	2	3
2	3	0

Multiplier un nombre entier par 10 ou 100

Connaissances mises en jeu pour justifier que 23 x 10 = 230

- comprendre l'écriture de position : 23 **c'est** 2 dizaines et 3 unités **(savoir décomposer)**
- savoir qu'il faut **multiplier chaque terme de la décomposition par 10**
  (connaître la distributivité). On obtient donc **20 dizaines et 30 unités**
- savoir que **20 dizaines = 2 centaines** et que **30 unités = 3 dizaines (savoir convertir)**
- savoir que **2 centaines et 3 dizaines c'est 230 (savoir composer)**

Quand on multiplie un nombre par 10, chaque chiffre prend une valeur "10 fois plus grande"
Les chiffres "changent" de valeur donc de place dans le tableau de numération
➔ déplacement d'un rang vers la gauche de tous les chiffres
➔ apparition du zéro dans la colonne des unités

➔ Utilisation du glisse-nombre dès le cycle 2

Le glisse-nombre avec les nombres entiers

Multiplier par 10

mille	centaines	dizaines	unités
		2	0

Chaque chiffre monte d'un rang,
sa valeur est 10 fois plus grande.

Le glisse-nombre avec les décimaux

Multiplier par 10

mille	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes	
			5,	6	7		

Les procédures sont les mêmes.

POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

5. Synthèse

Math É sciences31

académie
Toulouse

direction des services
départementaux
de l'éducation nationale
Haute-Garonne

Les incontournables de l'enseignement du calcul posé

➔Garder en mémoire que les 3 modalités de calcul se complètent car elles ont des domaines d'efficacité différents.

➔Introduire le calcul posé quand calcul mental et en ligne ont montré leur limite.

➔Choisir le même algorithme de calcul posé pour toute la scolarité avec même écriture et même verbalisation.

➔ Amener les élèves à justifier les actions réalisées à chacune des étapes de l'algorithme pour aider à sa compréhension.

➔ Proposer des représentations adaptées.

➔ Entrainer les élèves dans la durée avec des reprises régulières.